

1914.

LIBRARY
MICHIGAN STATE NORMAL
COLLEGE

No. 13.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH

F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. U. E. WIEDEMANN, P. DRUDE.

VIERTE FOLGE.

Band 44. Heft 5.

DER GANZEN REIHE 340. BANDES 5. HEFT.

KURATORIUM:

M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, W. VOIGT, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG

DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK.

MIT FÜNF TAFELN.



LEIPZIG, 1914.

VERLAG VON JOHANN AMBROSIIUS BARTH.
DÖRRHENSTRASSE 16.

Bestellungen auf die „Annalen“ werden von allen Buchhandlungen, von den Postämtern und von der Verlagsbuchhandlung angenommen. Preis für den in 24 Heften (= 3 Bänden) ausgegebenen Jahrgang 54 M.

(Ausgegeben am 19. Juni 1914.)

Inhalt.

	Seite
1. Felix Ehrenhaft. Die Quanten der Elektrizität. Der Nachweis von Elektrizitätsmengen, welche das Elektron unterschreiten, sowie ein Beitrag zur Brownschen Bewegung in Gasen. (Hierzu Tafel XII, XIII u. XIV.)	657
2. Friedrich Kottler. Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung. (Hierzu Tafel XV und XVI, Tabelle 1 und 2.)	701
3. Hedwig Kohn. Über das Wesen der Emission der in Flammen leuchtenden Metaldämpfe	749
4. K. Baedeker und W. Vehrighs. Die durch Deformation hervorgerufenen Thermokräfte und ihre Benutzung zur Messung der elastischen Hysteresis	783
5. F. Krüger und A. Lauth. Theorie der Hiebtöne	801
6. H. Geiger. Stoßweise Spitzenentladungen und die elektrische Methode der Zählung der α -Teilchen. Erwiderung auf die gleichlautende Arbeit der Herren L. Mysowsky und K. Nestorch	813
7. Fabrikmäßige Darstellung von Merkursulfat für Normalelemente	816

Die Redaktion der Annalen wird von den umseitig genannten Herren besorgt. Den geschäftlichen Teil hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien übernommen, an den auch Manuskripte zu senden sind. Seine Adresse ist: **Würzburg, Pleicherring 8.**

Es wird gebeten, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten.

Die Verlagsbuchhandlung liefert 100 **Sonderabdrücke** jeder Arbeit kostenfrei. Falls ausnahmsweise mehr gewünscht werden, so muß dies bei Rücksendung des ersten Korrekturbogens an die Druckerei auf dessen erster Seite bemerkt werden. Alle anderen, die Sonderabdrücke betreffenden Mitteilungen bittet man an die Verlagsbuchhandlung zu richten.

Anderweitiger **Abdruck** der für die Annalen bestimmten Abhandlungen oder Übersetzung derselben innerhalb der gesetzlichen Schutzfrist ist nur mit Genehmigung der Redaktion und Verlagsbuchhandlung gestattet.

Die **Zeichnungen** sind in möglichst sorgfältiger Ausführung den Abhandlungen auf besonderen Blättern beizulegen (nicht in das Manuskript selbst einzuzichnen). Da die Figuren fortan möglichst in den Text eingefügt werden sollen, ist die Stelle des Manuskriptes recht genau anzugeben, wo sie hingehören.

Zitate sind am Rande oder unten auf den Seiten des Manuskriptes (nicht in dem Text selbst) und zwar möglichst in der in den „Fortschritten der Physik“ üblichen Form mit Angabe des Namens und Vornamens, der Band-, Seiten- und Jahreszahl aufzuführen.

Be
für
M
Be
U
Op
G
ein
bu
te
un
we
M
ge
sk
2.
Be
De
S
in

m
St

W
Er
Al

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 44.

1. *Die Quanten der Elektrizität.*¹⁾

Der Nachweis von Elektrizitätsmengen, welche das Elektron unterschreiten, sowie ein Beitrag zur Brownschen Bewegung in Gasen; von Felix Ehrenhaft.

(Hierzu Tafel XII, XIII u. XIV.)

Inhaltsverzeichnis: I. Teil. § 1. Einleitung. — § 2. Kritische Betrachtung einiger Schlüsse, welche zur Atomistik der Elektrizität führten. — § 3. Grundsätzliche Gesichtspunkte für eine Methode zur Messung kleinster einzelner Elektrizitätsquanten. — § 4. Grundzüge der Beobachtung. — § 5. Grundzüge der Berechnung. — § 6. Programm der Untersuchung. — § 7. Neue Details der Versuchsanordnung mit Taf. XII. Optischer Teil und Kondensator. Elektrischer Teil und Zeitmessung. Gasreinigung. Erzeugung kleiner Quecksilberkügelchen. — § 8. Gang eines Versuchs. Isolierung eines Quecksilberkügelchens. Die Schwebungen. Die Umladung des Partikels. — § 9. Die Atomistik der Materie und die analytische Wage. — § 10. Die Quanten der Elektrizität und die elektrische Wage. — § 11. Bestimmung der absoluten Ladungswerte. 1. Die Beweglichkeit aus Widerstandsgesetzen (Cunningham, M. Knudsen-Weber, Mc Keehan), Fig. 2, dazu Nachweis der Kugelgestalt a) aus dem Bilde der Dunkelfeldbeleuchtung, b) an den mikroskopischen Bildern (Taf. XIII u. XIV), c) durch vergleichende Messung. 2. Die Beweglichkeit aus der Einsteinschen Theorie der Brownschen Bewegung a) die Brownsche Bewegung in Gasen, b) Kriterium für die Definiertheit der Beweglichkeit aus der Brownschen Bewegung. — § 12. Resultate. — § 13. Schlüsse. a) Über die Brownsche Bewegung in Gasen. b) Betreffend die Quanten der Elektrizität.

§ 1. Einleitung.

Mehr denn je haben sich in den letzten Jahren die atomistischen Theorien der *Materie*, der *Elektrizität* und der *Strahlung* in der Physik Bahn gebrochen. Noch vor wenigen

1) Subventioniert von der Kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien aus der Pontischen Stiftung und erneuert aus der Czermakschen Erbschaft. Auszugsweise mitgeteilt aus den Sitzungsberichten dieser Akademie. 123. (IIa). p. 58—155. 1914.

Jahren hat es Ludwig Boltzmann für nötig befunden, die „Unentbehrlichkeit der Atomistik“ in der Naturwissenschaft eigens zu betonen. Seither haben sich die Anschauungen rasch in diesem Sinne geändert. Alle, die in der Physik als exakter Naturwissenschaft tätig sind, sind von dem hohen heuristischen Werte dieser Theorien überzeugt; je größer die Erfolge solcher Theorien sind, desto leichter wird es verständlich, daß die auf dieser Vorstellungsweise fußenden Hypothesen bei ihren Schöpfern und Anhängern häufig so viel Lebendigkeit gewinnen, daß manchen als absolut naturwahr erscheint, was doch oft nur anthropomorphe Gedanken sind.

Soll nun eine Theorie mehr sein als bloße spekulative Betrachtung, will sie etwa auf die wahre Existenz gewisser der Theorie entspringender Vorstellungen schließen, wie dies in neuerer Zeit häufig geschieht, dann müssen die Grundpfeiler, auf welchen sie aufgebaut ist, der kritischen Prüfung des Experiments in jeder Hinsicht standhalten können.

Nachfolgende Studie setzt sich nunmehr zur Aufgabe, von *unmittelbaren Tatsachen* ausgehend, diese Grundlagen für einen Teil der genannten Hypothesen, für die Atomistik der Elektrizität, bis an die äußerste derzeit erreichbare Grenze einer Prüfung zu unterziehen, und so der Beantwortung der Frage näher zu treten, ob es, wie die Theorie voraussetzt, in der Natur eine kleinste, nicht mehr teilbare Elektrizitätsmenge gibt und ob diese kleinste Elektrizitätsmenge die Ladung des einwertigen Wasserstoffions oder Elektrons ist.

Die heute allgemein gültige Vorstellung über das Wesen der Elektrizität läßt bekanntlich die Annahme nicht zu, daß das Elektron, ein ganz bestimmtes Elektrizitätsquantum, noch teilbar ist, sondern es soll, der Hypothese nach, als kleinstes nicht mehr teilbares Quantum existieren, das $4,1$ oder $4,7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. betragen soll.

Das *Elektron* hat als *Naturkonstante* in der neueren Physik eine universelle Bedeutung gewonnen, die sich nur mit der Wichtigkeit der Lichtgeschwindigkeit für optische und elektrische Theorien vergleichen läßt.

Ist das Elektron das kleinste elektrische Quant, so kann jeder Körper nur Elektrizitätsmengen empfangen oder abgeben, die diesem gleich oder die ein Vielfaches dieser kleinsten Größe

sind. Die Aufladung oder Entladung kann nur nach ganzzahligen Vielfachen dieses Quants erfolgen. Man nimmt an, daß in *Gasen* die Anzahl der transportierten Quanten unabhängig sei von der chemischen Beschaffenheit der Gase, unabhängig von der chemischen Beschaffenheit der kleinen Konduktoren, welche diese Elektrizitätsmenge tragen; in den *Flüssigkeiten* dagegen trägt die Materie je nach der Valenz des Atoms ein, zwei oder mehrere Quanten vereint. Die Zahl der Quanten ist also nicht unabhängig von der chemischen Natur der Träger der Ladungen.

Das kleinste Quantum in der Flüssigkeit, die Ladung des Wasserstoffatoms, soll ferner der Größe nach mit dem sog. Ion im Gase gleich sein.

Dieses kleinste Quantum finden wir der Hypothese nach im negativ elektrisch geladenen Teilchen wieder, das im Kathodenrohre von der Kathode abgeschleudert wird, ferner im β -Partikel der radioaktiven Substanzen. Für diese Partikel gilt nach der Elektronentheorie das zweite Axiom der klassischen Mechanik nicht mehr; denn der Ausbau der Elektronenhypothese führte zu dem Schlusse, daß die Masse der β -Partikel, das Verhältnis der ablenkenden elektromagnetischen Kraft zu der hervorgerufenen Beschleunigung mit der Geschwindigkeit der β -Teilchen anwächst. Die Masse der β -Partikel wird also vorwiegend elektromagnetischer Natur.

Nicht so klar und bestimmt wie über die *negative* Elektrizität spricht die derzeit geltende Theorie über die *positive* Elektrizität.

§ 2. Kritische Betrachtung einiger Schlüsse,
welche zur atomistischen Theorie der Elektrizität führten.

Gegen diese scharfe Formulierung der Elektronentheorie habe ich schon vor vier Jahren einige Bedenken geäußert¹⁾ und im besonderen darauf hingewiesen, daß die *Werte* des sog. *Elementarquantums*, die man nach diversen Mittelwerts- resp. statistischen Methoden erschlossen hatte, *weitgehendsten Schwankungen* unterworfen waren, so daß der Gedanke, ob es sich in diesem Falle überhaupt um eine definierte Konstante handelt

1) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 119. (IIa). Mai 1910. — Vortrag am 82. Naturforschertag, Königsberg. Phys. Zeitschr. 11. p. 940. 1910.

oder nicht, von vornherein nicht abzuweisen war. Keineswegs konnte es sich, wie ich darlegte, bei allen Bestimmungen bis zu diesem Zeitpunkte um mehr als um Mittelwerte handeln.

Um zu dem leitenden Grundgedanken der Methode zu gelangen, durch welche ich die Frage nach der Existenz eines kleinsten, nicht mehr teilbaren Elektrizitätsatoms prüfen wollte und im weiteren zu prüfen beabsichtige, seien nur drei wichtige Punkte herausgehoben, welche zu der einleitend besprochenen Formulierung der Elektronentheorie geführt haben, deren Unsicherheiten anderseits vorliegende Methode zu beseitigen sucht.

Wenn wir Wasser elektrolysieren, so scheidet sich an der Kathode jedesmal ein Gramm Wasserstoff ab, so oft die gleiche Elektrizitätsmenge, das Faraday, hindurchgeht. Wenn nun der Wasserstoff aus Atomen aufgebaut ist, dann kann man sich die Elektrizitätsmenge so transportiert denken, daß jedes Wasserstoffatom ein bestimmtes, für jedes Atom gleiches Quant trägt, ohne daß man je wird nachweisen können, ob wirklich jedes Atom eine solche Menge transportiert, und ob die kleinen Konduktoren, die einzelnen Atome, wirklich stets gleiche Ladungen tragen; denn es sind deren so viele, daß wir ihre Zahl kaum erfassen können. Selbst wenn man innerhalb der bestimmbaren Grenzen die kleinstmögliche Menge des Gases abscheiden ließe, so wären es immer noch so viele Atome, daß stets derselbe Mittelwert resultieren müßte.

Jede solche Bestimmung kann daher nur einen *Mittelwert* ergeben und niemand kann über die von einem *einzelnen* Atome getragene Elektrizitätsmenge etwas aussagen. Daher erscheint mir dieser Weg zu einer kritischen Prüfung über die Gleichheit aller in der Natur existierenden Ladungen — und über die kleinsten Ladungen — nicht geeignet.

Man mußte daher auf eine andere Weise die Größe dieser kleinsten Ladung bestimmen. Betrachten wir etwa den Vorgang in einem Kathodenrohr oder die β -Strahlen der radioaktiven Substanzen.

Der Kathodenstrahl ist bekanntlich durch ein elektrisches und magnetisches Feld ablenkbar. Wenn man sich den Kathodenstrahl als aus einzelnen durchaus negativ geladenen Korpuskeln (Elektronen) bestehend vorstellt, die mit sehr großer Geschwindigkeit abgeschleudert werden, dann ergibt

sich die Geschwindigkeit dieser Partikeln aus den Versuchen ungefähr zu $\frac{1}{10}$ der Lichtgeschwindigkeit. Als noch raschere bis nahezu mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Elektronen deutet man die β -Partikel der radioaktiven Substanzen. Diese Versuche geben jedoch nicht die Ladung eines solchen Korpuskels, sondern bloß das Verhältnis der Ladung zur Masse, und auch da bekommen wir noch nicht den Quotienten der Ladung eines Korpuskels durch seine Masse, sondern einen Durchschnitt dieses Verhältnisses über eine sehr große Zahl dieser Teilchen.

Bei der physikalischen Deutung dieser Versuche schlägt nun die Theorie die erste Brücke. Sie vergleicht den aus der Elektrolyse folgenden Mittelwert e_H der Ladung des Wasserstoffatoms, geteilt durch die bekannte Masse m_H des Wasserstoffatoms, mit den Mittelwerten der spezifischen Ladung der Kathodenstrahlen oder β -Teilchen $(e/m)_\beta$; so daß die zahlenmäßige Beziehung besteht

$$\left(\frac{e}{m}\right)_\beta = \frac{e_H}{m_H} \cdot 1,8 \cdot 10^3.$$

Diese Gleichung kann nun sehr verschieden gedeutet werden. Es können die Ladungen e verschieden sein, es können die Massen m verschieden sein, *es können schließlich beide verschieden sein*. Denn die Gleichung gibt nur eine Beziehung zwischen zwei unbekannten Größen.

Der nächste Schritt hätte ein Versuch sein sollen, entweder die Ladung der β -Partikeln zu bestimmen oder eine richtige Schätzung der Massen vorzunehmen. Bedauerlicherweise ließ sich bisher weder der Mittelwert der Ladung der β -Teilchen bestimmen, noch viel weniger die Ladung eines β -Teilchens. Auch eine experimentelle Massenschätzung unterblieb.

Von den vielen Möglichkeiten der Schlüsse, welche die Beziehung eröffnet, machte man in der Elektronentheorie zunächst noch *probeweise* die Annahme, daß die beiden Elektrizitätsmengen e_H und e_β einander gleich seien. Daraus folgt, daß die Masse eines Kathodenstrahlteilchens $\frac{1}{1820}$ der Masse des Wasserstoffatoms wäre.

Man liest nun neuerdings häufig, es sei „nachgewiesen“

worden, daß die Masse eines β -Teilchens $\frac{1}{1820}$ der des Wasserstoffatoms sei; wie eben auseinandergesetzt, ist hier bisher noch kein Nachweis geführt, sondern bloß ein Schluß aus der Voraussetzung jener Hypothese gezogen worden, der auch den alten Massebegriff der Mechanik nicht verschonte; denn die weiteren Konsequenzen der Theorie fordern die eingangs angedeutete Ungültigkeit des zweiten Newtonschen Axioms der Mechanik.

So konnten die Untersuchungen an den Kathodenstrahlen und β -Partikeln uns *keinen Beitrag zur Kritik des Elektrons* liefern, sondern sie bedingen nur ein *weiteres Fortschreiten in der Hypothese*.

J. J. Thomson scheint letztere Mängel selbst empfunden zu haben, denn er und H. A. Wilson wußten in geschickter Weise von einer ganzen Nebelwolke die Zahl der Tröpfchen und die Gesamtladung der Elektrizitätsmenge, die in der Wolke transportiert wurde, direkt zu schätzen.

Sodann repartierte man diese Gesamtladung auf die einzelnen Tröpfchen, unter der heute gewiß schon unstichhaltig befundenen Voraussetzung, daß diese Tröpfchen alle gleich geladen wären. Man erhielt so einen gewissen Mittelwert, der wie ich auseinandersetze,¹⁾ bei den verschiedenen Experimenten in sehr weiten Grenzen schwankte. Da aber die Größenordnung der so erhaltenen Ladungen in die durch die Elektrolyse vorgeschriebenen Grenzen fiel, hielt man schließlich einen Wert $3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. als Ladung des Elektrons für begründet. Dabei darf man nicht übersehen, daß auch hier wieder eine willkürliche Mittelbildung über eine unverhältnismäßig große Zahl von Konduktoren, welche die Ladungen transportierten, vorliegt. Andererseits ist der zu beachtende *Fortschritt* bei dieser Methode in dem Umstande zu erblicken, daß eine Schätzung der mittleren Masse *und* der mittleren Ladung vorliegt.

Einen dritten wichtigen Gesichtspunkt für die Frage des Elektrons scheinen jene positiv geladenen Partikeln zu gewähren, welche man als α -Partikel bezeichnet, die von den

1) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 1910, I. c., Taf. 1.

radioaktiven Substanzen quantenhaft ausgestrahlt werden und die man an den Szintillationen gewisser Mineralien bemerkt.

Rutherford und E. Regener ist es gelungen, Folgeerscheinungen der einzelnen Partikeln in einem bestimmten Zeitraume zu zählen, ferner konnten sie, allerdings durch indirekte Methoden, die gesamte Strommenge bestimmen, welche von einer sehr großen Anzahl von α -Partikeln transportiert wird. Sodann haben sie die Ladung auf die einzelnen Partikeln repartiert und fanden, daß im Mittel auf eine α -Partikel $8-10 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. käme. Das ergab nun nicht den gewünschten Wert für das positive Elektron, sondern einen viel höheren, denn das Elektron galt damals als zu $3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. bestimmt. Man hätte annehmen müssen, daß das α -Partikel drei Elektronen trage. Ich selbst habe nun an dieser Stelle mit einer Abhandlung¹⁾ eingesetzt, in welcher ich für das Elektron den Mittelwert $4 \cdot 7 = 10^{-10}$ e. st. E. erhielt. Es war dies die erste Abhandlung, in der Ladungen von Einzelteilchen bestimmt wurden.

Es zeigten mir jedoch die Zahlen nur zu deutlich, daß ich eigentlich nicht berechtigt war, aus Messungsergebnissen, die an *einzelnen* Silberpartikeln gewonnen waren, Mittel zu ziehen.

Rutherford hat sich damals auf meine wie auf andere Mittelwerte gestützt und sich zu dem Schlusse berechtigt geglaubt, es wären auf jedem α -Teilchen zwei positive Quanten der Elektrizität und die Mittelwerte Thomsons zu $3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. wären zu klein bestimmt, weil noch einige Fehlerquellen, wie das Verdampfen des Wassers der Nebelwolke J. J. Thomsons während der Versuche, nicht berücksichtigt worden waren.

Gestützt war aber Rutherfords Hypothese durch die Entdeckung Sir W. Ramsays und Soddis über die Verwandlung der α -Partikeln in das Edelgas Helium. Helium hat das Atomgewicht 4; damit schließt sich der Ring, zu welchem sich die Hypothesen aneinander reihen, die man zwischen den Gesetzen der Elektrolyse und den Strahlen der radioaktiven Substanzen aufbaute, vollständig. Der Gleichung

1) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 118. (IIa). p. 321. 1909. — Phys. Zeitschr. 10. Nr. 9. p. 308.

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e_H}{m_H}$$

wird tatsächlich genügt.

Aber auch das α -Partikel kann nicht einzeln auf seine Ladung untersucht werden; denn die Kapazität unserer empfindlichsten elektrostatischen Meßinstrumente beträgt immerhin noch 1 cm, so daß höchstens die Ladung von 10^5 Partikeln gemessen werden kann. Man gelangt also auch hier nicht zu der wichtigsten Prüfung der Grundannahme der Elektronentheorie, weil es auch hier wieder unmöglich ist, die Ladungen der einzelnen α -Partikeln zu vergleichen. Ähnliches ergibt sich überdies bei allen übrigen Methoden und Schlüssen.

§ 3. Grundsätzliche Gesichtspunkte der Methode des Verfassers.

Ich bin daher im Jahre 1909 daran gegangen¹⁾, abweichend von den bis dahin üblichen Methoden Ladungen und Massen von *einzelnen* isolierten *möglichst kleinen* Partikeln der Materie zu messen. Dabei waren folgende Gesichtspunkte, die sich logisch aus dem eingangs Gesagten ergaben, für mich maßgebend.

1. *Kleinste Elektrizitätsmengen sind aller Voraussicht nach auf Körperchen kleinster Kapazität zu erwarten.*

2. Diese kleinsten Körperchen müssen aber immerhin *noch so groß sein*, daß man sie optisch *einzelnen* noch gerade *wahrnehmen kann*, da man sie einzeln der Messung unterziehen soll.

3. Diese Körperchen sollen, von möglichster *chemischer* Definierbarkeit und Stabilität sein.

Dadurch allein war ich schon auf kleinste Partikeln von Gold, Platin, Silber und Quecksilber verwiesen, denn dies sind *chemisch inerte* Substanzen.

Noch aus anderen sehr wichtigen Gründen sind die Edelmetallteilchen, insbesondere aber auch Hg gewiß die richtigen Objekte, die Frage zu lösen, weil das außerordentlich starke

1) F. Ehrenhaft, Anzeig. d. Wien. Akad. d. Wissensch. Nr. 7. 4. März 1909.

metallische Reflexionsvermögen diese sehr kleinen Metallpartikelchen wegen des sog. optischen Kontrastes in einer Größenordnung noch sichtbar zu machen gestattet, in der andere Substanzen z. B. Öl, Glyzerin, oder gar Wasser und andere Kondensationsprodukte optisch überhaupt nicht mehr wahrnehmbar sind.

Das Mikroskop gestattet bei Anwendung aller Feinheiten noch Körperchen vom mittleren Durchmesser einer halben Wellenlänge des Lichtes, d. i. etwa $2 \cdot 10^{-5}$ cm formgetreu abzubilden. Verzichtet man dagegen auf die geometrische Ähnlichkeit des Bildes, dann kann man durch Anwendung äußerster Dunkelfeldbeleuchtung das Vorhandensein solcher metallischer oder starkreflektierender, optisch kontrastreicher Partikeln noch weit unter obiger Größenordnung nachweisen; denn die intensiv beleuchtenden Strahlen werden von diesen metallischen Partikeln in die zu den beleuchtenden Strahlen senkrechte Richtung zerstreut. Läßt man nun diese Strahlen in ein Mikroskop fallen, dessen Visierlinie nunmehr normal zu den beleuchtenden Strahlen montiert ist¹⁾, dann sieht man jedes Partikel einzeln in Form eines hellglänzenden Beugungspünktchens auf schwarzem Grunde. Man kann also noch jedes einzelne Edelmetallteilchen bemerken und auf seiner Bahn verfolgen.

Die einfachste Art, solche Partikeln in inerten Gasen zu erzeugen, war von mir im Jahre 1907²⁾ angegeben worden. Man verdampft die Edelmetalle oder zerreißt Quecksilber im galvanischen Lichtbogen in einem inerten, trockenen, reinen Gase. Nach längerer Zeit beschlägt sich das Gefäß purpurrot bis blauviolett bei Gold, grün bis graubraun bei Silber, lichtgrau bei Quecksilber.

Damit war die Erzeugung und Beobachtungsart der Partikeln in befriedigender Weise gelöst und in die Reihe der elektrischen Meßinstrumente trat zum ersten Male das Mikroskop. Ich ging nun daran, Ladung und Masse eines so kleinen Partikelchens, etwa eines Metallpartikelchens, dessen Durchmesser bedeutend kleiner ist als die Wellenlänge des Natriumlichtes, zu messen.

1) Siedentopf-Zsigmondy, Ann. d. Phys. 10. 1903.

2) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 116. (IIa). p. 1175. 1907.

§ 4. Grundsüge des Experiments.

Zu diesem Zwecke habe ich vor das Mikroskopobjektiv einen Kondensator (Detailskizze I) gebracht, dessen Plattendistanz 1—2 mm betrug und habe den Raum zwischen den Metallplatten senkrecht zur Visierlinie des Mikroskops intensiv durchleuchtet. Diese Metallplatten waren exakt horizontal montiert. Die besprochenen Partikeln fallen in reinem Stickstoffgase gleichförmig herunter, die lichtstärkeren rascher, die lichtschwächeren langsamer. Dies läßt sich messend verfolgen. Setzt man die Platten unter Spannung, dann ändert sich das Bild. Das Feld der Erdschwere wirkt vertikal nach abwärts. Da die Kondensatorplatten exakt horizontal montiert sind, ist die Richtung des elektrischen Feldes ebenfalls genau vertikal und die elektrische Kraft wirkt vertikal abwärts oder aufwärts. Die Platten des Kondensators sind so groß, daß ein homogenes elektrisches Feld vorhanden ist.

Beim Einschalten des elektrischen Feldes, dessen Richtung mit der des Schwerfeldes in völliger Koinzidenz ist, ändert sich das Bild folgendermaßen: Es gibt *erstens* Teilchen, die in raschere Fallbewegung der verschiedensten Geschwindigkeitsstufen geraten; *zweitens* Teilchen, deren Fallbewegung unter Einfluß des elektrischen Feldes eine langsamere wird; *drittens* Teilchen, die von dem elektrischen Felde der Richtung des Schwerfeldes entgegen gehoben werden; *viertens* können hie und da Teilchen nahezu schwebend beobachtet werden. Ein Ausschalten des elektrischen Feldes unter gleichzeitigem Kurzschließen der Kondensatorplatten sistiert sofort die Beeinflussung durch das elektrische Feld und sämtliche Teilchen kehren zu ihrer regelmäßigen Fallbewegung zurück. Dies steht nun mit den Grundgesetzen der Elektrizitätstheorie im Einklange, wenn man annimmt, daß die Partikeln geladen sind.

§ 5. Grundsüge der Berechnung.

Auf ein Hg-Teilchen wirken dann bei richtig durchgeführter Versuchsordnung nur drei Ursachen, welche Ortsänderungen des Partikels bedingen, und zwar:

1. die Schwerkraft,
2. die elektrische Kraft, die nach den Grundgesetzen der Elektrostatik, der Ladung des Partikels proportional zu setzen ist und
3. die Impulse der Brownschen Bewegung.

Durch die ersten beiden werden geordnete Bewegungen hervorgerufen, durch die dritte eine ungeordnete Ortsänderung, von der des weiteren die Rede sein wird.

Unter alleiniger Voraussetzung der heute bereits mehrfach bestätigten Tatsache, daß die Geschwindigkeit eines solchen Partikels der auf dasselbe wirkenden Kraft proportional ist, ergibt sich, wenn v_f die mittlere Fallgeschwindigkeit unter dem Einfluß der Schwerkraft, v_e die mittlere Steiggeschwindigkeit bei Wirksamkeit des elektrischen Feldes \mathcal{E} auf ein Teilchen mit der Masse m und der Ladung e ist, Ladung und Masse des Partikels aus den beiden Gleichungen

$$(I) \quad mg = \frac{1}{B} v_f, \quad e\mathcal{E} - mg = \frac{1}{B} v_e,$$

in diesen ist $1/B$ eine Proportionalitätskonstante. B ist allgemein definiert als die Geschwindigkeit des Teilchens unter Einfluß der Kraft 1 und heißt die „Beweglichkeit“ des Partikels. Gesucht wird die Ladung e und die Masse m , und wofern die Kugelgestalt des Partikels sichergestellt ist, auch sein Radius a . Dazu muß man die Beweglichkeit des Partikels kennen, man bedarf demnach noch einer dritten Beziehung, die zur Bestimmung dieser Größe führt. Hierauf soll in folgenden Paragraphen näher eingegangen werden.

§ 6. Programm der Untersuchung.

Nachfolgende Abhandlung führt nun an kleinen *Hg-Tropfen* von den Dimensionen der Lichtwellenlänge und noch kleinerer das Arbeitsprogramm durch, das ich in meiner Abhandlung exponierte, die vor anderen einschlägigen Arbeiten in den Berichten der Wiener Akademie in den Jahren 1909 und 1910 l. c. und in der Physikalischen Zeitschrift¹⁾ l. c. erschienen war, über die ich am Königsberger Naturforschertage 1910 berichtete.

1) Ehrenhaft, Phys. Zeitschr. 11. p. 619. 1910.

Es werden die Ladungen der Einzelpartikel, deren Massen geschätzt, und ferner die Ladungsänderungen der Partikeln erneuert gemessen, über deren Nachweisbarkeit ich in den Wiener Akademieberichten p. 858 u. p. 866 1910 bereits Mitteilung gemacht hatte.

Ich bestimmte, sowie ich in der Diskussion meines Vortrages am Naturforschertage in Königsberg¹⁾ im Jahre 1910 berichtete, mit einer registrierenden Uhr die Beziehung, welche zwischen der Ladung einer Partikel und deren Fall- und Steigzeit besteht. Weiter wird über die Möglichkeit, ein Partikel nahezu schwebend zu erhalten, in Ergänzung meiner Mitteilung vom Jahre 1910 erneuert berichtet. Es schließt sich ferner eine Studie der Brownschen Bewegung an.

Bezüglich der genauen Details der Versuchsanordnung verweise ich auf die Wiener Akademieberichte²⁾. Dort beschreibe ich diese weitläufig in der Absicht, denjenigen Forschern, welche auf demselben experimentell nicht einfachen Gebiete zu arbeiten beabsichtigen, meine diesbezüglichen Erfahrungen zugänglich zu machen und zur Verfügung zu stellen, um ihnen durch Angabe aller Details die Arbeit zu erleichtern.

Der größeren Übersichtlichkeit halber gebe ich in Taf. XII, eine schematische Darstellung der Anordnung. Dieselbe besteht aus dem optischen Teile und dem Kondensator (Taf. XII, Nr. 1—7), der Gasreinigung (Nr. 8—15), dem elektrischen Teile (Nr. 16—19) und dem Drei-Hebelstiftschreiber (Nr. 20) zur Zeitregistrierung. Die einzelnen Bestandteile sind auf der Skizze ersichtlich.

Es wird der im Maßstabe 1:17 verkleinert gezeichnete Kondensator, der vollständig homogenes Feld gewährleistet unter Anwendung exakter Dunkelfeldbeleuchtung verwendet. Derselbe ist, was wichtig erscheint, mit Präzision durch drei nicht gezeichnete Stellschrauben horizontal montierbar. Die optische Anordnung garantiert, daß nur in der mittelsten Vertikalebene des Kondensators, die mit der Einstellebene des Mikroskopes koinzidiert und nur gleich weit von den Konden-

1) Ehrenhaft, l. c.

2) Wiener Ber. 123. (IIa). p. 66—74.

satorplatten, also nicht in deren Nähe, derselben gemessen werden kann. In dieser Ebene erscheinen die Partikel als helle lichtschwache Punkte auf völlig schwarzem Grunde. Nur an solchen wurde gemessen. Ein Teilchen außerhalb der Einstellenebene, aber doch in genügender Nähe derselben erscheint als Scheibe. Die Messung war stets so eingerichtet, daß im ganzen Gesichtsfelde des Mikroskopes nur *ein* Partikel vorhanden blieb. Die elektrische Spannung am Kondensator ist stetig in weiten Grenzen regulierbar und durch ein eigens konstruiertes Pedale jederzeit kommutierbar.

Es soll nun in Kürze der Gang meiner Versuche beschrieben werden.

Mit der kleinsten möglichen Spannung wird im Zerstäubegeräte (Detailskizze II) ein Lichtbogen zwischen Hg hergestellt, in welchem das Hg zu feinsten Tröpfchen zerreißt. (Die kleinen dieser Tröpfchen schweben oft viele Stunden lang.)

Sodann wird die Hg-Suspension in Stickstoff in den Kondensator eingelassen: Nach dem Schließen der Hähne vor und nach dem Kondensator kommt die Gasmasse augenblicklich zu vollständiger Ruhe.

Die Hg-Kügelchen fallen gleichförmig in ihrer Größe entsprechenden Geschwindigkeitsstufen herunter; die lichtstärkeren größeren rascher, die lichtschwächeren langsamer.

Durch Einschalten des elektrischen Feldes im richtigen Sinne und durch Regulierung der Spannung am Kondensator gelingt es unschwer, ein beliebiges Kügelchen annähernd schwebend zu erhalten und so die Schwerkraft durch die elektrische Kraft zu kompensieren. Schon 1910 habe ich solche Spannungen angegeben, bei welchen Goldpartikeln schweben. Wenn diese Schwebespannung längere Zeit eingeschaltet ist, — es genügen meist 20 Sek. bis 1 Min. —, dann verlassen alle anderen Partikeln, sowohl die von gleicher Masse und höherer Ladung, als auch die von größerer oder kleinerer Masse und annähernd gleicher Ladung das Gesichtsfeld und wandern zu den Platten. Insbesondere werden auch die sogenannten unsichtbaren „Ionen“ wegen ihrer größeren Beweglichkeit aus dem Felde geräumt.¹⁾

1) Damit erledigt sich der von Joffé, Phys. Zeitschr. 12. p. 268. 1911, erhobene Einwand von selbst.

Ich habe überdies p. 837¹⁾ bemerkt, daß bei der starken Vergrößerung — 220fach bis 1000fach — wie ich sie verwende, ein vollkommenes Schweben nie zu bemerken ist, sondern eine, wenn auch noch so langsame, aber deutliche Steig- oder Fallbewegung.

Ist eine von diesen beiden konstatiert, so wird die Spannung am Kondensator etwas geändert, so lange bis sich die Steig- in Fallbewegung verwandelt hat oder umgekehrt; meine diesbezüglichen Angaben wurden von einem Mitarbeiter registriert und gleichzeitig die engen Grenzwerte der jeweilige Voltmeterspannungen abgelesen.

Es ist auch nicht schwierig die gerichtete Bewegung durch das elektrische Feld oder durch das Gravitationsfeld deutlich von der stets vorhandenen ungeordneten Bewegung zufolge der Brownschen Impulse zu unterscheiden.

Nach kurzer Übung ist ein Zweifel oder Irrtum ausgeschlossen.

Die beste Probe für die Genauigkeit der erhaltenen Werte findet man durch wiederholtes Bestimmen der Grenzspannungen für dieselbe Ladung.

Die Umladung des Partikels erfolgt am besten durch Ionisierung der Luft im Kondensator. Solche Umladungen habe ich schon im April 1910 konstatiert und im Anhang an meine Abhandlung mitgeteilt. Etwa ein halbes Jahr später hat Millikan ebenfalls auf diese Erscheinung bei seinen größeren Ölkugeln hingewiesen.

Spontane Umladungen während einer Versuchsreihe kamen nur selten vor. Unter allen Messungen, welche ich in einem halben Jahre machte, kam nur ein einziges Mal eine spontane Umladung vor. In allen anderen Fällen mußte sie erst künstlich herbeigeführt werden.

Zu diesem Zwecke brachte mein Gehilfe ein in Aluminium gehülltes Radiumpräparat in die Nähe des Kondensators. Solange der Kondensator an Spannung liegt, bleiben niemals freie Ladungen im Kondensator, das Partikel bleibt in seiner schwebenden Lage. Wenn man den Kondensator kurz schließt, so daß keine elektrischen Kräfte wirken, beginnt das Kügelchen

1) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 119. (IIa). Mai 1910

seine Fallbewegung und nimmt dabei aus dem nunmehr ionisierten Gase manchmal Ladungen auf. Um dies sofort zu konstatieren, ist es zweckmäßig, mittels des Kondensatorhebels bloß für Momente den Kondensator an Spannung zu legen. Bleibt das Partikel beim Schließen nicht sofort schwebend, sondern hält in einer langsameren oder rascheren Fallbewegung an, so erkennt man, daß es umgeladen ist.

Sodann wird wieder das enge Intervall der Grenzspannungen bestimmt, die *Steig-* resp. *Fallbewegung* einleiten. Das ange-deutete Verfahren wiederholt man beliebig. Nach längerer Zeit muß das Partikel durch die Impulse der Brownschen Bewegung die Einstellebene verlassen. Eine Änderung der Tubuslänge jedoch gestattet wieder seine weitere Beobachtung als scharfes lichtschwaches Pünktchen.¹⁾

Ich nahm nun eine möglichst lange Serienmessung vor, wobei ein Teilchen mit kleiner Fallgeschwindigkeit über die einfache Innendistanz der Okularmarken, bei größeren, rascher fallenden Teilchen über die Innendistanz zweier Okularmarken registriert wurde.

Nach einiger Übung gelingt es unschwer, diese Partikeln auch bis zu 60mal zu heben und sodann bei kurzgeschloss-nem Kondensator wieder fallen zu lassen und die diesbezüg-lichen Zeiten auf 0,03 Sek. genau zu registrieren. Die Grenze der Beobachtungsdauer ist durch die Ermüdung des Auges gegeben.

§ 7. Die Atomistik der Materie und die analytische Wage.

Unter anderem möchte ich in dieser Abhandlung unter-suchen, ob eine atomistische Theorie der Elektrizität mit den Versuchen dieser Studie in Einklang zu bringen ist oder nicht. Daher ist es naheliegend, auch hier zunächst jene gebahnten Wege zu betreten, die in der Chemie seit mehr als 100 Jahren erfolgreich gegangen wurden.

1) Es würde die Versuche wesentlich erleichtern, wenn der Kondensator nicht vor das Beobachtungsmikroskopobjektiv geschraubt wäre sondern getrennt vor dasselbe montiert wäre, so daß ein Teilchen auf seiner Bahn durch Nachstellen des Mikroskopes verfolgt werden kann. In vorliegender Studie wurde auf diese Erleichterung verzichtet um immer präzise an der gleichen Stelle im Kondensator zu messen.

Allerdings herrscht zwischen Atomistik der Chemie und der Elektrizität ein prinzipieller und wichtiger Unterschied, den ich vorweg nehmen will. Die Atomistik der Chemie läßt es sich mit Verhältniszahlen genügen, sie ist eine relative Atomistik.

Anders in der Physik. Diese will mehr, denn sie setzt sich die absolute Bestimmung des kleinsten Quantes zum Ziele.

Ein kleines Beispiel illustriere den Fall: Es handle sich darum, zu ergründen ob ein Element, zum Beispiel Stickstoff, atomistisch ist. Zu diesem Zwecke hat man die verschiedenen Verbindungen des Stickstoffes einer quantitativen Analyse zu unterziehen. Wir finden dabei zum Beispiel im Grammmoleküle die Menge $e_1, e_2, e_3 \dots$ g Stickstoff usw. Wenn sich also Stickstoffverbindungen aus einer kleinsten Konstituente ''' dem Stickstoffatome ''' aufbauen, so müssen wir finden, daß $e_1 = n_1 \varepsilon, e_2 = n_2 \varepsilon, e_3 = n_3 \varepsilon \dots$ usw. sein muß, wenn ε dieses Atom Stickstoff bedeutet. Als erste Bedingung für die Möglichkeit einer atomistischen Erklärung ergibt sich, daß die analytische Wage uns Mengen $e_1, e_2 \dots$ auswiegen muß, die sich so wie $n_1 : n_2 : \dots$ verhalten, wobei diese im Verhältnis einfacher ganzer Zahlen stehen. Aus dem gewonnenen ε ergibt sich sodann

$$\varepsilon = \frac{e_1}{n_1} = \frac{e_2}{n_2} = \frac{e_3}{n_3} = \dots$$

Diese Konstituente ist so lange die kleinste, als sich keine Verbindung findet, in welcher sich entweder ein ε nicht mehr als ganzzahlige Vielfaches des ε darstellen läßt, oder gar das ε unterschreitet.

Millionen Analysen geben solche einfache Verhältniszahlen, ohne daß das Atomgewicht des Stickstoffes hätte geändert werden müssen.

Die Verhältnisse $e_1 : e_2 : e_3$ werden mit der analytischen Wage bestimmt. Daraus ergibt sich von selbst, daß die Verhältnisse nur mit der Genauigkeit bestimmt werden können, mit welcher die Wage arbeitet.

Es ergibt sich nämlich niemals das Gewicht genau, sondern es kann nur zwischen zwei Grenzen eingeengt werden. Ergebe sich z. B. für eine Stickstoffverbindung $\mathbb{E}_1'' < e_1 < \mathbb{E}_2''$, für eine zweite etwa $\mathbb{E}_1' < e_2 < \mathbb{E}_2'$, so folgt aus diesen beiden Ungleichungen:

$$\frac{\mathfrak{E}_1''}{\mathfrak{E}_2'} < \frac{e_1}{e_2} < \frac{\mathfrak{E}_2''}{\mathfrak{E}_1'}.$$

Es ergeben sich demnach auch für die Verhältnisse der Gewichte, die in den verschiedenen Stickstoffverbindungen enthalten sind, umso engere Grenzen je genauer die Wage arbeitet. Zwischen diesen liegen immer die Verhältnisse einfacher ganzer Zahlen.

§ 8. Die Quanten der Elektrizität und die elektrische Wage.

Wir wollen nun untersuchen, ob die Elektrizität die Kriterien dieser einfachen Ganzzahligkeit anwendbar sind und ferner, welche kleinste Elektrizitätsmenge resultiert. Dazu müssen wir *demselben Hg-Kügelchen verschiedene Ladungen geben*.

Wie ich schon 1910¹⁾ mitgeteilt habe, ändern kleine Metallpartikeln ihre Ladungen spontan, oder gezwungen, wenn man die Luft zwischen den Kondensatorplatten ionisiert. Man stellt sich vor, daß kleine freie Elektrizitätsmengen vom Hg-Tröpfchen aufgefangen werden, so daß das Kügelchen hintereinander die Mengen e_1, e_2, e_3 annimmt. Diese Ladungen wollen wir nun gleichsam auswägen.

Es gelang in den bereits vorerwähnten Versuchen jene Spannung am Kondensator zu bestimmen, bei welcher die Schwerkraft durch die auf das Partikel wirkende elektrische Kraft ungefähr kompensiert wurde. Das Teilchen wandert z. B. zunächst sehr langsam nach aufwärts. Es bestimmt sich jene Spannung \mathfrak{E}_2' , bei der das Kügelchen gerade noch steigt. Die Ladung des Kügelchens ist nach untenhin durch die Ungleichung begrenzt

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}_2'} < e_1.$$

Nun wird die Spannung stetig so lange verringert, bis die deutliche Fallbewegung des Kügelchens eintritt. Analog folgt für diesen Fall:

$$e_1 < \frac{mg}{\mathfrak{E}_1'}.$$

Damit ist die Ladung durch nachfolgende Ungleichung zwischen zwei Grenzen eingengt

1) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 119. (IIa), Mai 1910.

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}_2'} < e_1 < \frac{mg}{\mathfrak{E}_1'}$$

Wird nun das Hg-Kügelchen umgeladen, so ergibt sich aus diesem zweiten *Verbindungskomplex* der Elektrizität mit dem Hg-Kügelchen für die zweite Ladung neuerdings die Ungleichung

$$\frac{mg}{\mathfrak{E}_2''} < e_2 < \frac{mg}{\mathfrak{E}_1''}$$

daraus ergibt sich für das Verhältnis e_1/e_2

$$\frac{\mathfrak{E}_1''}{\mathfrak{E}_2'} < \frac{e_1}{e_2} < \frac{\mathfrak{E}_2''}{\mathfrak{E}_1'}$$

Nun wollen wir nachsehen, ob tatsächlich wie in der Chemie die Verhältnisse der Ladungen e_1/e_2 durch einfache ganze Zahlen darstellbar sind.

Es sei ein Beispiel durch Zahlen illustriert. Nachfolgende Details gehören Partikel Nr. VII Hg in *N* an.

Die Distanz der Kondensatorplatten betrug 1,87 mm.

Das zunächst positiv geladene Partikel ist bei einer angelegten Spannung

von	↑ 38,1 Volt steigend. ¹⁾
Steigt weiter bei	↑ 35,6 „
auch noch bei	↑ 35,2 „
es schwebt bei	34,2 „
es fällt bei	↓ 31,3 „

Sodann wird es umgeladen:

es steigt bei	↑ 23,0 Volt
es fällt bei	↓ 20,8 „

Zweite Umladung

es schwebt bei	32,8 Volt
es fällt bei	↓ 29,1 „ usw.

wobei bei diesem Kügelchen die Grenzen von 10 Umladungen bestimmt wurden.

Die Ladungen sind den Schwebespannungen umgekehrt proportional, man erhält daher ein relatives Maß der Ladungen, wenn man die reziproken Schwebespannungen vergleicht. Zu diesem Behufe ordnen wir die Schwebespannungen in einer

1) Der Pfeil bedeutet die Richtung der Bewegung: ↑ steigend, ↓ fallend.

Tabelle an und stellen neben diese zur Bildung der Verhältnisse der Ladungen die reziproken Schwebespannungen, und zwar die aus der obigen Einengung folgender Grenzwerte.

Tabelle.

Schwebespannungen in Volt			Reziproke Schwebespannungen, d. i. proport. den Ladungen			Anzahl der Vielfachheit der Ladung und Ladungssinn	Relative Ladungswerte		
Steigend	schwebend	fallend	untere Grenze	Mittel aus Schwebungen	obere Grenze		kleiner als ϵ	ungefähr gleich ϵ	größer als ϵ
35,2	34,2	31,3	0,0284	0,02925	0,0319	+ 2	0,0142	0,01462	0,01595
23,0	—	20,8	0,0406	—	0,0435	+ 3	0,0136	—	0,0145
—	32,8	29,1	—	0,0305	0,0344	+ 2	—	0,01525	0,0172
73,5	—	61,0	0,0136	—	0,0164	+ 1	0,0136	—	0,0164
34,8	—	32,3	0,0287	—	0,03095	- 2 ¹⁾	0,01435	—	0,0155
25,0	—	18,9	0,0400	—	0,0530	- 3	0,0133	—	0,0177
—	33,0	—	—	0,0304	—	- 2	—	0,0152	—
72,8	—	64,5	0,0137	—	0,0155	- 1	0,0137	—	0,0155
—	33,8	31,95	—	0,0296	0,0313	- 2	—	0,0148	0,01565
76,0	—	64,2	0,0132	—	0,0156	- 1	0,0132	—	0,0156

Die reziproken Schwebespannungen sind Relativmessungen der Ladungen, die dasselbe Partikel hintereinander angenommen hat. Es müssen daher die unteren Grenzen der gleichbezeichneten Ladungen, wie übrigens auch ein Blick auf die Tabelle lehrt, kleiner sein, als die oberen Grenzen derselben Ladungen. Man geht daher am exaktesten vor, wenn man die betreffenden Ladungen zwischen die engsten Grenzen setzt; dies sind im vorliegenden Falle die fettgedruckten.

Sollen nun weiter die betreffenden Ladungen tatsächlich Vielfache einer kleinsten Konstituente sein, so müssen die Verhältnisse der Ladungen durch einfache ganze Zahlen darstellbar sein. Diese einfachsten Zahlen müssen wir nun bestimmen. Dabei ist es von besonderem Vorteil, daß wir statt einer angeblichen Schwebespannung, die wir übrigens gar nicht experimentell ermitteln können, zwei zuverlässige Grenzen erhalten; ebenso wie es vorteilhafter ist, das Gewicht einer kleinen

1) Von dieser Ladung wurde der Absolutwert bestimmt.

Masse durch Wägung mit Schwingungen zwischen Grenzen einzuengen, als dasselbe bloß auf der Wage auszubalancieren.

Es ergibt sich von selbst, daß wir wieder nicht eine Verhältniszahl als Quotienten zweier Ladungen, welche das Partikel sukzessive angenommen hat, erhalten, sondern zwei genaue Grenzen, zwischen denen das tatsächliche Verhältnis der beiden Ladungen liegen muß. So z. B. wurden die Zahlen 2 und 3 — die ersten beiden der Tabelle — folgendermaßen gefunden:

Die entsprechenden engsten Grenzen für e_1 und e_2 sind

$$0,0287 < e_1 < 0,03095$$

$$0,0408 < e_2 < 0,0435,$$

demnach erhält man

$$\frac{0,0287}{0,0435} < \frac{e_1}{e_2} < \frac{0,03095}{0,0408},$$

daraus:

$$0,660 < \frac{e_1}{e_2} < 0,758;$$

wie man sich leicht überzeugen kann, liegen zwischen 0,660 und 0,758 nur folgende einfachen ganzzahligen Verhältnisse (mit Nennern, die kleiner sind als 10):

$$2:3; 7:10; 5:7; 3:4.$$

Da es sich darum handelt die Verhältnisse der Ladungen nach Tunlichkeit durch kleine ganze Zahlen darzustellen, nahm ich zunächst diejenigen Brüche zuhülfe, deren Nenner kleiner sind als 10.

Da nun einesteils unter den einfachen Verhältnissen, die bei der Schrankenbildung der anderen Ladungen auftreten, sich wieder das Verhältnis 1:3, und 1:2 für die Verhältnisse der Ladungen e_3/e_2 und e_3/e_1 ergibt, ist man berechtigt, als einfachste Verhältniszahlen $e_1:e_2 = 2:3$ zu setzen.

Als Grenzen für die zunächst bloß in einem relativen Maße an diesem Partikel gemessene Konstituente der elektrischen Ladung ergibt sich zufolge der Beziehung $\varepsilon = e_i/n_i$ die Reihe der in Tabelle angeführten relativen Ladungswerte.

Man sieht aus dieser, daß die beobachtete Konstituente zwischen Grenzen eingeschlossen ist, die um 1 Proz. differieren (0,0145 und 0,01435).

Bei diesem Hg-Kügelchen ließen sich die Verhältnisse der Ladungen, die das Partikel hintereinander angenommen

hat, durch relativ kleine Zahlen darstellen, und zwar durch 2:3; 2:1:—2:—3:—1:—2:—1.

Wie sich das bei den übrigen Partikeln verhält, entnimmt man den Zahlen p. 693. Hier sei aber bemerkt, daß die Verhältnisse häufig nicht so einfach darstellbar sind, sondern meist durch Reihen wie 3:4:8:8:6 (Partikel VIII) oder 5:4:—1:—2 (Partikel II) ferner z. B. 4:2:4:5:3:3:2 (Partikel IX) usw.

Man sieht also unmittelbar, daß die erste Frage, ob wir die Ladungsänderungen eines Partikels durch Annehmen oder Abgeben von Quanten erklären können, in positivem Sinne beantwortet werden kann. Man kann also im Gase eine gesetzmäßige Beziehung zwischen den Größen der Ladungswerte, die ein Hg-Partikel bei Umladungen hintereinander annimmt finden; denn diese Ladungswerte lassen sich an einem und demselben Partikel als einfache Vielfache einer Ladung ansprechen.

Etwas anderes ist nun die Frage, ob nun diese Darstellung einen tieferen Sinn hat und ob diese Umladungen bei den verschiedenen Partikeln stets durch dasselbe Quant oder durch Vielfache desselben Quants erfolgen oder nicht. Diese Frage aber ist gleichbedeutend mit der nach der Messung der absoluten Ladungswerte der Partikel, zu welcher wir nun schreiten.

§ 11. Bestimmung der Absolutwerte von Ladung und Masse.

1. Aus Widerstandsgesetzen.

Aus den beiden Gleichungen I ist die Ladung e und die Masse m bestimmbar, wenn wir die Beweglichkeit B der Partikel kennen. Nehmen wir an, daß diese Partikeln Kugeln sind; die Berechtigung zu dieser Annahme wird in p. 681 ff. erwiesen werden.

Auf althergebrachte und klassische Weise definierte man die Beweglichkeit aus dem Stokesschen Gesetze zu

$$B_{st} = \frac{1}{6\pi\mu a},$$

μ ist der Koeffizient der inneren Reibung des Gases, so berechnete ich auch in meiner Abhandlung l. c. Ladung und Radius a der Partikel, bemerkte jedoch sofort in derselben Abhandlung, in welcher zuerst am Einzelteilchen beobachtet und gerechnet wurde, daß bei Berücksichtigung event. Korrekturen für seine kleine Partikeln in Gasen diese Beweglichkeit B

noch größer zu erwarten sei, woraus dann noch kleinere Ladungen resultiert werden müßten, als diejenigen, welche die Stokessche Formel ergab.¹⁾ In der Folge²⁾ zog ich zum Vergleiche die Beweglichkeiten heran, berechnet nach den Korrekturen, die Cunningham für kleine Kugeln angibt.

Die Beweglichkeit ist dann definiert zu³⁾

$$B = \frac{1}{6\pi\mu a} \left\{ 1 + \frac{1,63 \frac{l}{a}}{f + 2(1-f)} \right\}.$$

Die Größe f , das Verhältnis der elastischen zu den gesamten Zusammenstößen der Hg-Kugel mit den Gasmolekeln liegt zwischen 0 und 1. Jedenfalls hängt f auch von der Beschaffenheit der Oberfläche des Kügelchens ab. Der vollkommenen Rauheit der Oberfläche einer gleichförmig im Gase bewegten Kugel, an welcher alle Molekeln wie unelastische Kugeln reflektiert würden, demzufolge nahezu ihre gesamte Energie im Stoße an die Kugel abgeben, würde der Grenzfall $f = 0$ entsprechen.

Wollte man dagegen annehmen, daß alle Molekel elastisch reflektiert werden, dann ist $f = 1$ zu setzen. Zwischen oder an diesen Grenzen liegt die richtige Korrektur für Kugeln, deren Dimensionen vergleichbar sind mit der mittleren Weglänge der Gasmolekeln. Es ist naheliegend, daß die Größe f bis zu einem gewissen Grade vom Materiale und vom Gase abhängen dürfte.

Die Beweglichkeit müßte also zwischen den Grenzen

$$B_{f=0} = \frac{1}{6\pi\mu a} \left\{ 1 + 0,815 \frac{l}{a} \right\} \quad \text{und} \quad B_{f=1} = \frac{1}{6\pi\mu a} \left\{ 1 + 1,63 \frac{l}{a} \right\}$$

liegen.

Jedenfalls läßt dieses Gesetz die Richtigkeit der Größenordnung des Resultates erwarten; es reichte für meine Be-

1) Vgl. überdies die Bemerkung Plancks in der Diskussion meines Vortrages auf dem Naturforschertage zu Königsberg. Phys. Zeitschr. 11. p. 952. 1910.

2) F. Ehrenhaft, l. c. p. 860. Wiener Ber. 1910.

3) Setzt man für B in die Gleichungen I p. 11 ein, so erhält man da mg , für Kugeln von der Dichte s , $(4\alpha^3\pi/8)sg$ ist, eine Gleichung 2. Grades für den Radius und somit die Beweglichkeit.

stimmungen zunächst um so mehr aus, als ich keine weitgehenden Schlüsse aus diesem Gesetze allein gezogen habe.

Seither hat sich die Sachlage wesentlich gefestigt; denn außer der Diskussion von M. Reinganum¹⁾ haben M. Knudsen und S. Weber im Hinblick auf die Wichtigkeit dieser Widerstandsgesetze für die Bestimmung des Elementarquantums sich der dankenswerten Mühe unterzogen, diese Gesetze wesentlich besser zu fundieren; sie haben die Korrekturen unabhängig von den etwa aus Bestimmungen der Ladungen und aus Annahme über diese Ladungen folgenden Schlüsse²⁾ experimentell untersucht. Die letztzitierten Untersuchungen haben auch jene Fälle im Auge, bei welchen die Radien der Kugeln von der Größenordnung der Weglänge der Gasmolekeln sind. Sie waren dabei in der Lage, eine Beweglichkeit experimentell zu verifizieren, die sich zu

$$B_{\text{Kn.}} = \frac{1}{6 \pi \mu a} \left\{ 1 + 0,683 \frac{\bar{l}}{a} + 0,354 \frac{\bar{l}}{a} e^{-1,845 \frac{a}{\bar{l}}} \right\}$$

ergibt. Hierin ist \bar{l} die nach O. E. Meyer definierte mittlere Weglänge der Gasmolekeln.

Diese Beweglichkeit unterscheidet sich von der nach Cunningham definierten nur durch einen etwas veränderten Wert der Konstanten, sowie durch ein Exponentialglied, das nur in Betracht kommt, wenn der Radius kleiner ist als die mittlere Weglänge.

Die beste Übersicht erlangen wir durch nachfolgende Kurvenschar, in welcher den Fallgeschwindigkeiten kleiner Hg-Kügelchen in N bei Atmosphärendruck als Abszissen die entsprechenden Radien als Ordinaten zugeordnet sind, und zwar für die Widerstandsgesetze nach Stokes, Stokes-Cunningham, Knudsen-Weber und Mc. Keehan. Die von Knudsen-Weber *experimentell* ermittelte Kurve schließt sich an die von Cunningham errechnete ($f=0$) eng an; die Mc. Keehansche verläuft zwischen $f=0$ und $f=1$, nahe an $f=0$ (Fig. 2).

Es ergibt sich also eine gute Übereinstimmung zwischen

1) M. Reinganum, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. Jahrg. 23. p. 1025.

2) M. Knudsen und S. Weber, Ann. d. Phys. 26. p. 981. 1911

Experiment und Theorie. Die etwa noch vorhandenen kleinen Abweichungen sind für unsere nachfolgenden Schlüsse ohne jeden Belang. Ich werde mich daher darauf beschränken, die Werte für die Grenzen $f = 0$ und $f = 1$ anzugeben.

Fassen wir nun nochmals zusammen: es ergibt sich Ladung und Radius aus der Beweglichkeit zufolge der Widerstandsgesetze, wenn man die Messung der Steiggeschwindigkeit im elektrischen Felde, bzw. der Fallgeschwindigkeit im Schwerfeld durchgeföhrt hat.

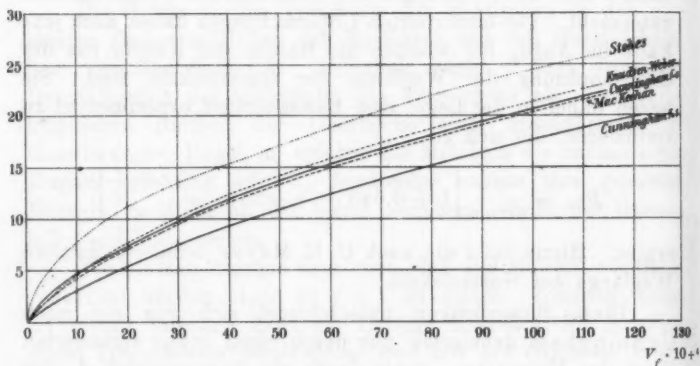


Fig. 2.

Der Mittelwert der Geschwindigkeit ist leicht aus einer größeren Anzahl von Messungen an demselben Partikel zu erhalten. Denn zufolge der Vertikalkomponente der Brownschen Bewegung müssen diese Werte bei Partikeln der von mir beobachteten Größenordnung nicht gleich sein, sondern sie schwanken um einen Mittelwert. Gerade dieser letztere interessiert für die Widerstandsgesetze.

Man überzeugt sich leicht, daß selbst bei den kleinsten Partikeln der Mittelwert nach 10—15 Einzelbeobachtungen bereits genau definiert ist, und daß neu hinzukommende Werte das Resultat nicht mehr ändern. In der Tabelle p. 693 werden also auf Grund der Widerstandsgesetze, und zwar für die angeführten Grenzwerte die Ladung und mittlere Dimension der Hg-Partikelchen bestimmt.

2. Nachweis der Kugelgestalt kleiner Hg-Partikelchen und verdampfter Teilchen von Edelmetall, sowie deren metallische Oberfläche.

Um die Berechnung nach den Widerstandsgesetzen vornehmen zu dürfen, bedarf es des Nachweises, daß diese Partikel Kugelgestalt haben; ich möchte allerdings glauben, daß bei Hg-Tröpfchen dieser Nachweis beinahe überflüssig ist, denn wenn ein Körper überhaupt Kügelchen erwarten läßt, so ist es das Hg.

a) Aus dem Dunkelfeldbilde.

Vor allem will ich den Befund aus der äußersten Dunkelfeldbeleuchtung geben. Wir erhalten dabei kein winkel- und flächengetreues Abbild des Partikels, sondern bloß eine Beugungserscheinung. Es läßt sich bereits direkt beobachten, daß selbst so kleine Partikeln noch Licht abbeugen, bzw. im Mikroskope senkrecht zur Richtung, in der sie beleuchtet werden, gewisse Eigenfarben der Metalle noch deutlich erkennen lassen.¹⁾ Man überzeugt sich hiervon am einfachsten, wenn man unmittelbar hintereinander unter sonst gleichen Umständen Hg, Ag und Au vergleicht. Es zeigt sich da die typisch selektive Farbe des abgelenkten Lichtes. Bei Gold orangerot, rot und seltener grünlich bei Silber glänzend grau mit grünlichem Stich, bei größerem Hg weißgelblich glänzend. (Optische Resonanz.²⁾

Ein geübter Beobachter ist wohl imstande bei einer Mischung von solchen Partikeln in einem Gase an der Farbe des Dunkelfeldbildes noch zu entscheiden, aus welchem Metalle das Partikel ist, was ja von Suspensionen ultramikroskopischer Metallpartikeln in Flüssigkeiten allgemein bekannt ist.

Man sieht weiter bei demselben Materiale lichtstärkere und lichtschwächere Partikeln. *Die lichtstärkeren haben durchaus eine größere Fallgeschwindigkeit wie die lichtschwächeren.* Das ist in Übereinstimmung mit der Theorie, denn die Fallgeschwindigkeit ist dem Gewichte des Partikels proportional. *Wären die Partikeln nicht einheitlich in ihrer Form, dann könnte diese Beziehung nicht allgemein sein.* Ferner entwerfen diese

1) F. Ehrenhaft, Das optische Verhalten der Metallkolloide. Wien. Ber. 62. IIa. p. 181. 1903; E. Müller, Ann. d. Phys. 24. p. 1.

2) Vgl. P. Drude, Lehrbuch der Optik. p. 228. 1912.

Partikeln Beugungsscheibchen, die zweifelsohne erkennen lassen, daß diese von einem *Einzelpartikel* herrühren; denn es ist bekannt, daß die ultramikroskopischen Bilder von Partikeln von dieser Ordnung eine Zusammenballung von zwei oder drei Partikeln auch in der Flüssigkeit leicht kenntlich machen. Auch im Gase sind solche Zusammenballungen bei genügender Auflösungsfähigkeit des Mikroskopobjektives leicht kenntlich.

Bei Dunkelfeldbeleuchtung sind diese Partikeln kenntlich als einzelne lichte *abnormale* Beugungsscheibchen; wenn deren mehrere aneinander gereiht sind, so wird ein Aggregat von solchen Lichtpunktschen sichtbar, das von mehr oder weniger zahlreichen gemeinsamen Beugungskonturen umgeben ist. Bei Hg oder Edelmetallen sieht man schon am ultramikroskopischen Bilde im Gase, daß es sich um *Einzelteilchen* handelt.¹⁾

Das ultramikroskopische Bild allein gestattet aber auch den Schluß zu machen, daß diese Partikel, wofern man es bei Hg überhaupt in Frage ziehen will, von der Kugelgestalt nicht wesentlich abweichen können. Ich erinnere diesbezüglich an die Äußerung Siedentopfs in der Diskussion meines Vortrags auf dem Königsberger Naturforschertage.

„Ich bestätige daraus den Befund, daß es sich z. B. bei Silber um sogenannte normale Beugungsscheibchen handelte. Falls die ultramikroskopischen Silberteilchen Dr. Ehrenhafts ausgeprägt blättchenförmig oder stäbchenförmig wären, würde man infolge von Drehungen beim Fallen ein Funkeln erwarten müssen, da die Sichtbarmachung linearer ultramikroskopischer Teilchen vom Azimut der Beleuchtung abhängen wird. Ein solches Funkeln ist mir nicht aufgefallen, trotzdem ich besondere Aufmerksamkeit bei der Beobachtung hierauf verwendete.“

Aus den mikroskopischen Bildern.

Die *Kugelgestalt* der Edelmetallpartikeln, sowie der Hg-Tröpfchen mit einem Radius bis unter den vierten Teil der Wellenlänge des Lichtes wird aber durch Auflösung der Partikeln im mikroskopischen Bilde zur *vollen Gewißheit*.

1) Durch diesen Umstand sind die Hypothesen von E. Weiss, Wien. Ber. 120. (IIa.) p. 1136. 1911, widerlegt.

Auf diesem Wege habe ich schon in meinen ersten Abhandlungen die Kugelgestalt nachgewiesen.¹⁾ Ich will aber auf diesen Punkt aus verschiedenen Gründen nun nochmals ausführlich zurückkommen.

Über die Abbildungsmöglichkeit.

Nach der Theorie von Helmholtz und Abbé werden Durchmesser und Gestalt des Bildes, sobald die Größe des Objektes unter ein großes Vielfaches der Wellenlänge des Lichtes fallen, nicht vollständig durch Dimension und Gestalt des Partikels bestimmt, sondern sie hängen von der Apertur des Mikroskopes und von der Wellenlänge des abbildenden Lichtes ab. Es bewirkt die unvollständige Aufnahme des von den Partikeln abgebeugten Lichtes durch das Objektiv stets eine scheinbare Vergrößerung des Durchmessers im Bilde; je höher die numerische Apertur des abbildenden Objektivs gewählt wird, desto kleiner wird diese scheinbare Vergrößerung des scheinbaren Durchmessers, desto belangloser ein etwaiger Fehler.

Derartige Abweichungen des erzeugten Bildes vom Objekte sind, wofern wir den Durchmesser der Partikelchen mit $2 \cdot a$, die Apertur des Objektivs mit A bezeichnen, der Theorie nach erst zu erwarten, bei Partikelchen, deren Dimensionen in einer Richtung wesentlich kleiner sind, als

$$2 a < \frac{\lambda}{2 A},$$

worin λ die Wellenlänge des abbildenden Lichtes bedeutet.

Benutzen wir also den Zeiss'schen Apochromat homogene Immersion, 1,3 Apertur, 2 mm Brennweite, so tritt dieses Mißverhältnis zwischen dem entworfenen Bilde und dem abzubildenden Objekte erst ein bei Durchmessern

$$2 a < \frac{4 \cdot 10^{-5}}{2,6},$$

also bei Partikeln, deren Dimensionen in eine Richtung $1,5 \cdot 10^{-5}$ cm unterschreiten, also erst bei nahezu isodiametrischen Körperchen mit mittleren Radien unter $0,7 \cdot 10^{-5}$ cm ein.

1) F. Ehrenhaft, l. c. p. 839. Vgl. auch C. R. Sur les quantités minima d'électricité etc. t 158. p. 1072.

Nur bei Partikelchen also, deren wirklicher Durchmesser in jeder Richtung erheblich kleiner ist als $1,5 \cdot 10^{-5}$ cm, kann man aus dem entworfenen Bilde nichts mehr über die Form des Partikels aussagen; so kleine Partikelchen werden wir aber diesmal ausschließen.

Um genauere Abbildungen der Kügelchen zu erhalten, habe ich Objektträger aus Glas ganz kurze Zeit dem Gase ausgesetzt, in welchem Partikeln suspendiert waren. Es setzen sich dann auf dem ebenen Objektträger Metallpartikelchen ab. Anstatt die zu untersuchende Stelle mit einem Deckglase zu bedecken, das insbesondere etwas größere Partikeln deformieren könnte, bringe man direkt auf das Objekt einen Tropfen eingedickten Zedernöles (N_D bei $18^\circ \text{C.} = 1,515$) und löse das Bild mit Zeiss-Apochromat 2 mm n. A. 1,3 auf. Die so entstandenen Bilder erweisen nicht nur eklatant die Kugelgestalt der Partikeln, sondern sind auch ein schönes Testobjekt für die Helmholtz-Abbésche Beugungstheorie des Mikroskopes.

Um aber über die Auflösungsfähigkeit des benutzten optischen Systems vollkommene Klarheit zu erlangen, gebe ich im nachfolgenden die Testobjekte:

Taf. XIII, Bild I, *Pleurosigma angulatum*, welches die sechseckigen Zellen erkennen läßt, sowie in Taf. XIII, Bild II, das interessante Testobjekt *Surirella gemma* mit den Querstreifen, von welchen, wie ersichtlich, 2,5 auf $1 \cdot 10^{-4}$ cm gehen, sowie den äußerst zart gezeichneten Längsstreifen, wovon 3,2 auf $1 \cdot 10^{-4}$ cm fallen. Diese letzteren sind bekanntlich schwer sichtbar zu machen.

Man sieht, wie es sein soll, die korbgeflechtartige Zeichnung in kleinen, abwechselnd hell und dunkel gezeichneten Rhomboiden. Rechts, zwischen Teilstrich 30—35 des Okularmaßstabes, ist ein Fehler im Präparate, das natürlich auch nicht überall gleich scharf eingestellt sein kann; zwischen 25 und 30 des Okularmaßstabes, bei dem ein Teil = $11,5 \cdot 10^{-6}$ cm, also ca. 3 Wellenlängen des violetten Lichtes bei allen Bildern mit Ausnahme von III u. IV bedeutet, ist das Bild scharf eingestellt.

Die Hg-Partikeln abgebildet auf Tafel XIV stellen sich als exakte, kompakte Kugeln dar. Die Bilder der von mir einge-

stellten Objekte hat Hr. Dr. L. Richtera, Assistent am hier-
ortigen Institut auf Lumière-Blau-Etikette-Platten entworfen.

Betrachten wir zuerst das Bild VII, Taf. XIV der Hg-Teilchen:

Ein Teilstrich des hier leider nicht scharf abgebildeten
Okularmaßstabes beträgt $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm. Die Vergrößerung ist
1305fach.

Bild VII gibt einen so treffenden Beweis der richtigen
Abbildung der Konturen durch obiges optisches System.
Unter dem leider etwas unscharfen Teilstrich 10 des Okular-
maßstabes ist ein größeres Kügelchen ($a = \text{ca. } 4 \cdot 10^{-5}$ cm) ab-
gebildet, das sich zwischen zwei kleine Kügelchen ($a \text{ ca. } 1,5 \cdot 10^{-5}$ cm) gesetzt hat. Es macht den Eindruck eines
saturnartigen Körperchens.

Damit ist die genügende Auflösungsfähigkeit für diese
Partikelgröße erwiesen, so daß eigentlich die Testobjekte
überflüssig wären.

In Bild V, das das ganze Gesichtsfeld des Mikroskops
wiedergibt, sieht man an den Hg-Kügelchen deutlich, daß das
Objektiv ($A = 1,3$), wie zu erwarten steht, nur in der Mitte
des Gesichtsfeldes scharf abbildet.

In Bild VI handelt es sich zum Teile um etwas größere
Hg-Tröpfchen, die ich in unmittelbarer Nähe des zerstäubenden
Lichtbogens auf einen Objektträger fallen ließ. Das optische
System war wieder dasselbe, Objektiv $nA\ 1,3$, Kompensations-
okular 12, ein Teilstrich des Maßstabes bedeutet wieder
 $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm. Die Vergrößerung ist diesmal durch andere
Kameralänge 816fach. Es wurde stark schiefes Licht durch
die Iris erzeugt. Die Hg-Kügelchen reflektierten dabei von ihrer
glänzenden metallischen Oberfläche Licht direkt ins Mikroskop,
was an dem hellen Fleck auf der Seite jedes plastisch erscheinenden
Kügelchens erkenntlich ist. Beim Drehen der Iris wandert
dieser helle durch das von der metallischen Kugel reflektierte
Licht erzeugte Fleck und kann in eine beliebige Lage auf der
Oberfläche der Kugel gebracht werden. Im subjektiven Bilde
ist er selbst noch bei den kleinsten Kügelchen zu sehen.

Dadurch ist es gelungen, die metallische Oberfläche der
Partikeln zu zeigen.

In Bild VIII, Taf. XIV wurde der Niederschlag der Ver-
brennungsprodukte des Zinks, der Zinkwolle unter ganz

gleichen Verhältnissen wie die Hg-Kugeln und die Testobjekte Bild I und II aufgenommen. Man sieht darauf, daß diese Partikeln von unregelmäßiger Form sind. Die Verbrennungsprodukte des unedlen Metalles Zink in O_2 enthaltender Atmosphäre lassen auch nichts anderes erwarten.

Das Objekt Bild IV, Taf. XIII ist Gold. Bei diesem Präparate wurde auf die etwas größeren Kugeln scharf eingestellt. In unmittelbarer Nähe sieht man ein von einer kleinen Kugel, die selbstverständlich ihre scharfe Einstellebene tiefer hat, herrührendes unscharfes Bild.

Auch bei Goldkugeln vom Durchmesser von $1\frac{1}{2}$ Lichtwellenlängen kann man bei Tageslicht noch leicht den goldgelben Metallglanz des reflektierten Lichtes deutlich sehen.

Aber auch kleinere Goldpünktchen etwa von der Dimension eines Viertels der Wellenlänge des Lichtes werden noch im Niederschlage mikroskopierbar; ich verzichtete auf deren Photographie, da im Bilde III, Taf. XIII solche wesentlich kleinere Silberkugeln zur Abbildung gelangen.

Bei Au und Ag wurde statt des Okularmaßstabes der Zeiss'sche Objektmaßstab mitphotographiert. Man kann sich durch den Vergleich mit dem Testobjekte II *Surirella gemma* überzeugen, daß auch bei dieser Größe eine Abweichung von der Kugelgestalt auf der Photographie ersichtlich werden müßte.

In eleganter Rechnung hat überdies Gustav Jäger gezeigt, daß auch Tröpfchen von vorliegender Größenordnung noch dieselbe Dichte besitzen wie größere Flüssigkeitsmengen. Ihr Radius ist nämlich wesentlich größer als die Wirkungssphäre der Molekeln, so daß ein kleinerer Binnendruck als der bei großen Flüssigkeitsmengen in dieser Größenordnung noch nicht zu erwarten ist. (Wiener Ber. 122. (IIa). p. 969.)

Ich deduziere also aus diesen Bildern die volle Berechtigung nicht nur in den Tropfen des Hg, sondern auch in den Edelmetallpartikeln durchaus metallische Kugeln zu erblicken. Es sind demnach im Luftraume solche einzelne Kugeln suspendiert.¹⁾

1) Dadurch sind die Einwendungen J. Perrins, die er zu wiederholten Malen, so z. B. am Quantenkongreß zu Brüssel (La théorie du rayonnement et les quanta, Langevin et de Broglie, p. 234) vorbrachte, widerlegt.

Daher können auch auf diese die Widerstandsgesetze mit vollem Rechte Anwendung finden.

Berechnung der Beweglichkeit aus der Einsteinschen Theorie der Brownschen Bewegung.

Wenn auch durch den erbrachten Nachweis der Kugelgestalt der Teilchen die Voraussetzungen für die Berechnung aus den Widerstandsgesetzen für die Metallpartikeln erwiesen sind und somit gegen die aus diesen gewonnenen Resultate kein Einwand erhoben werden kann, schien es mir dennoch wichtig, zum Vergleiche eine zweite Methode zu benutzen, welche sich durch den Umstand eröffnet, daß die Theorie der Brownschen Bewegung gestattet, ohne Heranziehung der in § 11 besprochenen Widerstandsgesetze die Beweglichkeit jedes Kügelchens aus demselben Zahlenmateriale auf einem ganz anderen Wege zu errechnen. Um damit aber gleichzeitig ein dezidiierteres Urteil über die Stichhaltigkeit letzterer Theorie zu gewinnen, wählte ich als Versuchsobjekt kleine Hg-Tropfen, die etwas größer waren als die Gold- und Silberkügelchen, an welchen ich in meinen früheren Arbeiten untersuchte.

Schon im Jahre 1907, drei Jahre bevor Perrin¹⁾ seine Abhandlung über die *Brownsche Bewegung* von Suspensionen in Flüssigkeiten und deren osmotischen Druck und den Vergleich mit obigen Theorien veröffentlichte, war ich in der Lage, nachzuweisen, daß diese Brownsche Bewegung an kleinen Silberpartikeln in Gasen tatsächlich vorhanden ist²⁾ und mit der von der Theorie geforderten Größenordnung einigermaßen übereinstimmt. Dies war die erste quantitative Untersuchung des Brownschen Phänomens, das heute vielfach als Beweis für die Existenz der Molekeln herangezogen wird. Schon im Jahre 1910 habe ich anlässlich meiner Arbeiten über die kleinsten elektrischen Ladungen für so kleine Goldkügelchen die Beweglichkeit auf Grund der Gesetze von Cunningham schätzen können und dabei eine Prüfung der Einsteinschen Theorie vorgenommen, wobei es

1) J. Perrin scheint seiner Bemerkung p. 112 seines Buches „Die Atome“ (deutsche Ausgabe von Lottermoser) zufolge übersehen zu haben, daß bereits damals ein Vergleich der Theorie der Brownschen Bewegung mit den Beobachtungen vorlag.

2) F. Ehrenhaft, Wiener Ber. 116. (IIa). p. 1175. 1907.

sich ergab, daß das nach Einstein berechnete Verschiebungsquadrat (die Partikelgröße aus den Widerstandsgesetzen gerechnet) stets größer war, als die beobachtete.

Betrachten wir etwa ein Goldkügelchen, das wir zu wiederholten Malen dieselben Strecken durchfallen lassen, dann wird die Vertikalkomponente der Brownschen Impulse ganz unregelmäßig verteilt, manchmal im Sinne der Fallbewegung, manchmal entgegengesetzt wirken; d. h. die beobachteten Fallzeiten werden einmal kleiner, einmal größer werden, z. B. 14,0, 15,6, 14,7, 15,7, 14,8 ... Sekunden betragen.¹⁾ Aus diesen Abweichungen läßt sich nun, wie dies l. c. näher ausgeführt wurde, ermitteln, daß sich z. B. am *einzelnen* ultramikroskopischen Goldpartikel, dessen Radius nach Stokes-Cunningham gerechnet wurde, eine mittlere sekundliche Ortsänderung von $11 \cdot 10^{-4}$ cm, wenn man diese aus Fall- und Steigzeiten kombiniert, während sich nach der Einsteinschen Formel errechnet eine solche von $20 \cdot 10^{-4}$ cm ergab.

Im allgemeinen zeigte es sich, daß die Brownsche Bewegung — die Radien immer aus den Widerstandsgesetzen errechnet — kleiner ausfiel als die Theorie Einsteins erwarten ließ. Auf diese scheinbare Unstimmigkeit habe ich zu wiederholten Malen hingewiesen.

Da ich aber stets der Meinung war und bin, daß man für die *Prüfung einer so wichtigen Theorie*, wie die des Elektrons ist, nicht neue Hypothesen heranziehen soll, welche für diese Größenordnung erst zu beweisen sind, habe ich nicht umgekehrt aus der beobachteten Brownschen Bewegung die Beweglichkeit gerechnet, sondern die Größe der Brownschen Bewegung, wie sie sich aus der Theorie ergibt, mit der experimentell ermittelten verglichen. Es hat de Broglie mit viel Erfolg auf Grund der Theorie von A. Einstein die Brownsche Bewegung zur Bestimmung eines Mittelwertes des sog. elektrischen Elementarquantums herangezogen. Während der von de Broglie erhaltene Wert des mittleren Teilchenradius seiner Rauchpartikeln die Stokessche Formel noch enthielt, ist der von ihm erhaltene Mittelwert des Elementarquantums von der Gültigkeit der Stokesschen Formel bereits

1) F. Ehrenhaft, Phys. Zeitschr. 12. p. 261 u. p. 94.

unabhängig. Es ist der Verdienst von M. Reinganum¹⁾, in seiner Diskussion über die Stokessche Formel, die sich an die Resultate meiner Versuchsergebnisse anschloß, zuerst auf diesen Umstand hingewiesen zu haben.

E. Weiss²⁾ in Prag hat nun auf den von mir bereits früher angegebenen Umstand, daß die aus den Widerstandsgesetzen gewonnenen mit den aus der Brownschen Bewegung bestimmten Beweglichkeiten nicht übereinstimmen, erneut hingewiesen. Wenn wir nun die Einsteinsche Theorie der Brownschen Bewegung als exakt richtig voraussetzen und als Grundlage weiterer Schlüsse verwenden, dann gelingt es, an Einzelpartikeln auf deren Ladung zu schließen, ohne bei der Berechnung ein bestimmtes Widerstandsgesetz für die Fallbewegung kleiner Partikeln heranziehen zu müssen, denn statt dieses Widerstandsgesetzes bietet die Brownsche Bewegung im Gase die Möglichkeit, die Beweglichkeit B desselben zu bestimmen.

Denn die unregelmäßige molekulare (Brownsche) Bewegung in Gasen gestattet auf Grund der schönen Theorie von Einstein die Beweglichkeit B eines suspendierten Partikels aus

$$(II) \quad B = \frac{N}{2RT} \bar{\lambda}^2$$

zu berechnen. Hierin bedeutet N die Loschmidtsche Zahl bezogen auf das Mol³⁾, $\bar{\lambda}^2$ das mittlere sekundliche Verschiebungsquadrat des Partikels in eine bestimmte Richtung, also eine experimentell bestimmbare Größe.

Wie man sofort übersieht, hat dieser Weg alle jene *Unsicherheiten* im Gefolge, welche der *kinetischen Gastheorie* an sich anhaften; wenn man insbesondere die Atomistik der Elektrizität untersuchen und die Entscheidung an Einzelteilchen treffen will, ist es vielleicht nicht ganz statthaft, solche Gesetze, welche der atomistischen Theorie der Materie

1) M. Reinganum, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 12. p. 1030. 1910.

2) E. Weiss, Lad.-Best. an Ag-Teilchen. Wiener Ber. 120. (IIa). p. 1029. 1911.

3) Es entspricht nicht der historischen Entwicklung diese Zahl nach jemand anderem zu benennen, denn es war das Verdienst des Wiener Physikers J. Loschmidt die Zahl der Molekeln im Kubikzentimeter als erster bestimmt zu haben. Vgl. Wiener Ber. 52. (II). p. 395. J. Loschmidt; die Größe der Luftmoleküle.

entspringen, heranzuziehen; denn die Schlüsse aus den Widerstandsgesetzen sind heute bereits fast frei von solchen molekularen Vorstellungen, da man auf Grund der experimentellen Untersuchungen von Knudsen-Weber und Mc. Keehan die Beziehung zwischen Kugelradius und Fallgeschwindigkeit als experimentell ermittelt ansehen kann.

Dieser mein Standpunkt wird um so eher einer gewissen Gültigkeit nicht entbehren, da, wie aus (II) ersichtlich ist, zur Bestimmung der Beweglichkeit B aus den beobachteten λ^2 die Loschmidtsche Zahl N eingeführt werden muß. Die Loschmidtsche Zahl ist ein statistisch erschlossener Mittelwert — die Zahl der Molekeln im Mol —, eine Zahl, die, wenn wir uns für einen bestimmten Wert derselben entscheiden und diesen als absolut richtig ansehen wollen, den *Mittelwert* eines elektrischen Elementarquantums bereits festlegt, wie schon eingangs erwähnt wurde.

Es scheint mir also durch diese Methode der Berechnung die Frage nach der Gleichheit der kleinsten elektrischen Ladungen bzw. nach der Größe eines kleinsten Quantes bis zu einem gewissen Grade gleichsam vorweggenommen und in den Voraussetzungen von den Schlußfolgerungen nicht mit jener Strenge getrennt zu sein, die für diese wichtigen Fragen erwünscht wäre.

Allerdings ergeben die Berechnungen auf diesem Wege wie man sich durch Substitution von (II) in (I) leicht überzeugt, nur das Produkt $N \cdot e$, also falls die Ladung des Teilchens das Elektron wäre das elektrochemische Äquivalent; etwa beobachtete Abweichungen dieses Wertes im Gase von dem der Elektrolyse müssen wohl als Unstimmigkeiten der Ladungen in Gasen gedeutet werden.

Schließlich möchte ich nicht unerwähnt lassen, daß die Theorie Einsteins noch in einem zweiten Punkte eine zunächst noch nicht ausreichend erwiesene Hypothese zur Grundlage hat. Denn sie überträgt das Maxwell-Boltzmannsche Äquipartitionstheorem, dessen Gültigkeitsbereich sich bis dahin nur auf molekulare Größenordnung erstreckte, auf in Gasen oder Flüssigkeiten eingebettete Partikeln bis zur Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes und darüber.

Dagegen besitzt diese Art der Berechnung den großen

Vorteil, daß sie *nichts* über die *Form* der Partikeln oder deren *Dichte* voraussetzt.

Gerade jene Faktoren also, welche man, um die Widerstandsgesetze anwenden zu dürfen, erst erweisen mußte, diese beiden Voraussetzungen, in welchen man die Hauptargumente gegen die Schlüsse meiner früheren Arbeiten sah und dagegen Einwendungen erhob, auf welche ich im zweiten Teile des in der Wiener Akademie der Wissenschaften 123 (IIa) 1914 ausführlich zurückgekommen bin, sind auf diesem zweiten unabhängigen Wege eliminiert.

a) Numerische Berechnung nach der Brownschen Bewegung.

Machen wir die Einsteinsche Theorie der Brownschen Bewegung zur Grundlage dieses zweiten Weges der Berechnung, so ergibt sich dann die Beweglichkeit des Partikels (sein reziproker Widerstand) aus der Gleichung (II).

Betrachten wir z. B. die Fallzeiten des Partikels Nr. 2 Hg in CO_2 obervähnter Arbeit. Die ersten Fallzeiten über die Strecke $l_1 = 581 \cdot 10^{-4}$ cm ergaben sich zu 24,7, 23,9, 24,6, 25,0, 27,0, 27,7 . . . , die Steigzeiten im elektrischen Felde zu 6,7, 6,2, 6,7, 7,0, 6,5 . . . , bei Spannung $V_1 = 0,5745$ e. st. E./cm.

Diese Schwankungen der Einzelbeobachtungen sind durchaus keine Beobachtungsfehler, denn die Genauigkeit der Beobachtung ist durch eigene Versuche zu 0,03 Sek ermittelt worden.

Bezüglich der ganzen Details der Berechnung der λ^2 und somit der Beweglichkeit aus den Schwankungen der Steig- und Fallzeiten verweise ich auf die erwähnte ausführliche Abhandlung in der Wiener Akademie der Wissenschaften.

b) Kriterium für die Definiertheit der Beweglichkeit aus der Brownschen Bewegung.

Wenn man aus den Schwankungen der Steig- bzw. Fallwerte die Beweglichkeit erschließen will, muß man vor allem nach den Kriterien der Definiertheit dieses Wertes fragen, was bisher unbeachtet blieb.

Um zu einem Kriterium der Definiertheit des Mittelwertes zu gelangen, wurde folgender empirische Weg eingeschlagen. Es wurde für jede Messung des $\bar{\lambda}^2$ für die 10 ersten, sodann für die 15 ersten usw. fortschreitend gerechnet, indem die nächsten Steig- bzw. Fallwerte der Rechnung einbezogen wurden.

Die Beweglichkeit ist um so genauer aus den Brownschen Abweichungen bekannt, je mehr Messungen der Berechnung zugrunde gelegt werden können. Jedoch kann als Kriterium für die Genauigkeit des erreichten Wertes die Tatsache angeführt werden, daß durch neu hinzugekommene Werte das erhaltene Resultat für die Beweglichkeit nur mehr geringen Schwankungen unterworfen ist.

Wird der erhaltene Wert der Beweglichkeit innerhalb der gewünschten Grenzen durch neu hinzukommende Werte nicht geändert, dann ist dieselbe bereits genügend genau ermittelt. Dies sei als „Konstanz der Beweglichkeit“ bezeichnet.

Diese Konstanz muß man in allererster Linie bei der Diskussion der Resultate, wofern diese stichhaltig sein sollen, berücksichtigen und darf somit Reihen, bei welchen dies nicht der Fall ist, keine Bedeutung beimessen.

Die nachfolgenden Zahlen mögen zur Illustration herangezogen werden. Dieselben sind z. B. bei Hg in *N* Partikel VII: $\bar{\lambda}_{10}^2 = 1,384 \cdot 10^{-6}$, $\bar{\lambda}_{15}^2 = 1,280$, $\bar{\lambda}_{20}^2 = 1,200$, $\bar{\lambda}_{25}^2 = 1,24$, $\bar{\lambda}_{30}^2 = 1,44$, $\bar{\lambda}_{34}^2 = 1,87$, $\bar{\lambda}_{40}^2 = 1,73$, $\bar{\lambda}_{46}^2 = 1,72$, $\bar{\lambda}_{51}^2 = 1,75$, $\bar{\lambda}_{57}^2 = 1,72$, $\bar{\lambda}_{62}^2 = 1,725$.

Von diesem wichtigen Gesichtspunkte aus teile ich meine Messungsergebnisse in zwei Gruppen, welche ich alle im Anhang an die erwähnte Abhandlung in den Wiener Akademieberichten wiedergebe, weil ich mich verpflichtet halte, alle meine Messungen so zu publizieren, daß an ihnen Kritik geübt werden kann. Mit einem * bezeichnet sind jene auf p. 693, bei welchen diesem Kriterium Genüge geleistet wird. Auch bei den Restlichen wäre, wenn es geglückt wäre die Messungsserie länger fortzusetzen, die Konstanz der Beweglichkeit eingetreten.

Es können also grundsätzlich für Schlüsse aus der Brownschen Bewegung nur solche Serien herangezogen werden, bei welchen 30 bis 35 Messungen ausgeführt werden konnten; dagegen genügt für Schlüsse aus den Widerstandsgesetzen, bereits eine Serie von 10—12 Messungen.

§ 12. Resultate.

Die experimentellen Resultate meiner Untersuchung sind im Detail im dritten Abschnitte der Abhandlung in den Wiener Berichten angeführt. Zur Erleichterung der Diskussion seien sie in nachfolgender Tabelle zusammengefaßt.

In der ersten Kolonne ist durch eine römische Ziffer ein Hg-Kügelchen in Stickstoff, durch eine arabische Ziffer ein

Tabelle 1.¹⁾

Nr.	Zahl der bestimmten Steig-Fallzeiten		Radius $a \cdot 10^6$ berechnet nach Widerstands-gesetzen von Cunningham		Quantenhafte Elektrizitäts-menge $e \cdot 10^{10}$ berechnet aus Browns Bewegung nach gesetzen von Cunningham		Durch Umladung konstatierte u. gemessene Vielfache des Quantes e	
	24	27	25,25	21,96	$f = 0$	$f = 1$	$f = 0$	$f = 1$
VIII.*	24	27	25,25	21,96	20,2	2,8	1,8	1,43
IX.*	23	21	23,85	20,62	20,45	3,46	2,15	2,13
I.*	16	18	21,1	18,9	19,5	1,8	1,3	1,38
VII.*	31	31	19,47	16,38	18,7	3,44	2,05	3,04
3.*	19	19	19,3	17,2	19,1	3,57	2,5	3,5
VI.	7	8	17,67	14,75	—	3,97	3,5	—
V.	6	7	17,31	14,42	—	5,69	3,22	—
III.*	17	17	14,8	12,0	18,4	3,67	1,94	6,32
IV.	8	8	14,05	11,27	—	3,72	1,34	—
XI.	8	10	13,06	10,37	—	3,61	1,79	—
I.*	22	23	11,4	8,81	16,1	1,32	0,61	—
II.	11	13	10,8	8,31	—	1,26	0,60	—
XII.	3	4	10,75	8,27	—	2,68	1,24	—
X.	14	13	10,70	8,23	—	1,85	0,88	—
4.*	14	14	9,65	7,85	13,05	1,32	0,69	—
2.*	14	15	8,41	6,71	12,2	0,28	0,14	—

1) Die detaillierten Zahlenangaben gelangen in den Wien. Ber. 1914 zur Veröffentlichung.

2) Hier wurde noch eine Ladung *unter* 1,29 bzw. 0,52 und 2,43 konstatiert.

solches in Kohlensäure gemessen gekennzeichnet. Ein Sternchen bedeutet, daß die Serie genug lang ist, um auch aus

der Brownschen Bewegung schließen zu können. Die zweite und dritte Kolonne enthält die Anzahl der gemessenen Steig- und Fallwerte, die nächsten drei Kolonnen enthalten die Maßzahlen der Radien mal 10^6 cm usw., die erste und zweite enthalten diese berechnet nach Widerstandsgesetzen § 11, p. (677), die dritte nach der Einsteinschen Formel der Brownschen Bewegung (§ 11, 2). Die nächsten drei Kolonnen geben das Quant, d. h. das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen, die das Kügelchen hintereinander getragen hat, und zwar wieder in den ersten beiden Kolonnen berechnet aus den möglichen Grenzen der Widerstandsgesetze, in der dritten aus der Brownschen Bewegung. Schließlich gibt die letzte Kolonne Vorzeichen und Vielfachheit des gemessenen Quants, ermittelt nach den Kriterien des § 10.

§ 13. Schlüsse.

Auf Grund der vorliegenden Studie glaube ich in der Lage zu sein, eine Reihe von Fragen, welche ich mir zum Programme gemacht hatte, zu beantworten.

Ich beginne mit dem Studium der Brownschen Bewegung der Partikeln. Die *Radien* der Quecksilberkügelchen, berechnet aus der durch die Widerstandsgesetze der definierten Beweglichkeit, der experimentell bestimmten *mittleren Fallgeschwindigkeit* unter Voraussetzung der Dichte und der Kugelgestalt der Tröpfchen sind nach fallenden Werten geordnet. Diese liegen zwischen $8,41 \cdot 10^{-6}$ cm bis $25 \cdot 10^{-6}$, gerechnet nach jener Widerstandsformel, welche die obere Grenze der möglichen Werte darstellt; zwischen $6,71$ und $21,96 \cdot 10^{-6}$ cm errechnet aus der unteren Grenze der Widerstandsgesetze. Wie in § 11, 1 ausgeführt wurde, sind die richtigen Werte nahe der oberen Grenze zu suchen.

Da ich die *Kugelgestalt* bis zu dieser Grenze nachgewiesen habe, § 11, 1, *bin ich gezwungen, aus den Widerstandsgesetzen Schlüsse zu ziehen.* Die Partikel sind im allgemeinen etwas größer als jene Edelmetallkügelchen, welche ich in früheren Abhandlungen besprochen habe. Damals war die Größenlage bei ultramikroskopischem Golde zwischen $3,5 \cdot 10^{-6}$ cm und $9,0 \cdot 10^{-6}$ cm für die obere Grenze, zwischen $2,3$ und $6,8 \cdot 10^{-6}$ cm für die untere Grenze der Widerstandsgesetze gegeben. Auch

bezüglich dieser Goldkugélchen bleiben alle meine Schlüsse zufolge § 11,1 aufrecht.

Nach der Einsteinschen Formel für die Brownsche Bewegung erhalten wir aus den *Abweichungen der einzelnen Fallzeiten* von der *mittleren Fallzeit* und aus der, sich so ergebenden *Beweglichkeit ohne Voraussetzung der Kugelgestalt und Dichte* des Quecksilberkugélchens das Gewicht desselben. Wir können nun den Radius eines gleich schweren Quecksilberkugélchens berechnen. Diese Radien sind in der dritten Kolonne angegeben.

Man sieht sofort, daß auch diese erstens der Größenordnung nach mit den auf einem ganz anderen Wege bestimmten übereinstimmen und zweitens daß sie sich wie diese nach fallenden Radien ordnen.

a) Bei näherer Betrachtung sieht man aber daß die nach der Brownschen Bewegung gerechneten Radien bei der Größe $a = 20 \cdot 10^{-6}$ cm vollständig *koinzidieren mit der unteren Grenze der aus den Widerstandsgesetzen erschlossenen Radien, von da ab stetig abnehmen*, aber in einem *geringeren Maße* wie die aus den Widerstandsgesetzen resultierenden Radien, so daß das kleinste Kugélchen, welches nach der oberen Grenze der Widerstandsgesetze den Radius $8,4 \cdot 10^{-6}$ cm ergibt, nach der Einsteinschen Formel den Wert $12,2 \cdot 10^{-6}$ cm hat.

A. Einstein hat auf dem Quantenkongresse¹⁾ sehr richtig als Beweis der Kugelgestalt die Bedingung des einfachen Zusammenhanges zwischen mittlerer Fallgeschwindigkeit und der sich aus der Brownschen Bewegung ergebenden Beweglichkeit des Partikels verlangt. Dieser ergibt sich nun tatsächlich aus vorstehenden Zahlen.

In Tab. I ist für jene Quecksilberkugélchen in Stickstoff, deren Konstanz der Beweglichkeit ermittelt wurde, der mittleren Fallgeschwindigkeit, die aus der Einsteinschen Theorie

1) A. Einstein, in *La théorie du rayonnement et les quanta* (Réunion tenue a Bruxelles 1911) Paris, Gauthier-Villars, p. 251. Daß auch bei den Weißschen Messungen, auf welche sich Einstein bezog, wenn man das hier auf p. 691 angegebene Kriterium berücksichtigt eine einfache Beziehung zwischen mittlerer Fallgeschwindigkeit und Beweglichkeit besteht habe ich in derschon erwähnten Abhandlung der Wiener Akademie 1914 p. 119 klar erwiesen. Es wurde dort auch gezeigt, daß man auch aus den Weißschen Messungen *nicht* auf ein Elementarquantum schließen kann, wie auf dem Quantenkongresse von Einstein und Perrin angenommen wurde.

Tabelle I			Tabelle II		
Partikel Nr. in N	Fallgeschwin- digkeit $v_f \cdot 10^4$ cm/sec	Aus Formel II nach Einstein errechnete Beweglichkeit B. 10^7 abs. E.	Partikel Nr. in CO ₂	Fallgeschwin- digkeit $v_f \cdot 10^4$ cm/sec	Aus Formel II nach Einstein errechnete Beweglichkeit B. 10^7 abs. E.
VIII	142,0	3,06	1	110,0	2,66
IX	128,6	2,69	3	94,0	2,38
VII	90,7	2,49	4	28,6	2,30
III	57,6	1,65	2	23,0	2,25
I	37,9	1,38			

folgende Beweglichkeit zugeordnet. Die Tab. II gibt dasselbe für Quecksilber in Kohlensäure.

Aus diesen Zahlen zeigen sich an Quecksilbentröpfchen in zwei verschiedenen Gasen lediglich geschlossen aus der Einsteinschen Theorie mit abnehmender mittlerer Fallgeschwindigkeit (und abnehmenden Radien) abnehmende Beweglichkeiten.¹⁾

Das heißt, kleinere Partikeln hätten, die exakte Gültigkeit der Einsteinschen Theorie vorausgesetzt, einen größeren Widerstand im Gase als größere Kügelchen oder mit anderen Worten durch ein und dieselbe Kraft würden kleinere Quecksilberkügelchen mit kleinerer Geschwindigkeit im Gase bewegt werden als größere. Dies kann nun auf zwei Ursachen zurückgeführt werden. Entweder wäre die Grundvoraussetzung zu den Gleichungen (I), daß die Beweglichkeit eines und desselben Teilchens von seiner Geschwindigkeit unabhängig ist, oder anders ausgedrückt, daß die Geschwindigkeit proportional ist der auf das Kügelchen wirkenden Kraft nicht erfüllt; zu dieser Annahme ist aber *keine Berechtigung* vorhanden, wie auch aus allen Arbeiten über diesen Gegenstand ausreichend hervorgeht.²⁾

1) Die Abnahme der Radien mit abnehmender Fallgeschwindigkeit ergibt sich auch aus dem optischen Bilde direkt, da die kleineren lichtschwächeren Pünktchen durchaus langsamer fallen, als die größeren lichtstärkeren. Schon dies weist auf eine eindeutige Beziehung hin.

2) Diese Tatsache folgt unmittelbar aus der Gültigkeit der Gleichung

$$\frac{(v_f + v_s)}{\mathfrak{B}} \mathfrak{E} = v_f$$

in der v_s die mittlere Steiggeschwindigkeit unter Wirksamkeit der elektrischen Feldstärke \mathfrak{B} , v_f die Fallgeschwindigkeit und \mathfrak{E} jene Feldstärke

Zweitens kann diese Abweichung darauf zurückgehen, daß am Einsteinschen Gesetze für so kleine Partikeln eine Korrektur vorzunehmen wäre¹⁾.

Da aber dieses Gesetz (II) für Quecksilberkügelchen mit Radien bis zu $2,10^{-5}$ cm gute Übereinstimmung gibt, wird diese Korrektur allem Anscheine nach erst von dieser Größenordnung abwärts ins Gewicht fallen, und zwar derart, daß die rechte Seite der Einsteinschen Beziehung mit einem Faktor multipliziert werden muß, der kleiner ist als 1 und in diesem Größenbereiche mit abnehmendem Radius kleiner wird.

Ich möchte hier ganz besonders hervorheben, daß diese Korrektur nicht als Widerlegung der Einsteinschen Theorie der Brownschen Bewegung anzusehen ist, sondern als ein Versuch einer Weiterbildung derselben. Es ist auch noch weitere experimentelle Aufklärung nötig, die im Zuge ist.

Der nunmehr wahrscheinliche Weg der Zukunft wird meiner Ansicht nach der sein, aus Beobachtungen der Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-7} cm, die, wie diese Studie beweist, noch experimentelle Verfolgung der Vorgänge am Einzelteilchen gestattet, d. h. also aus den sogenannten kolloidalen Vorgängen auf die molekularen zu extrapolieren und nicht, wie es vor Einsteins Theorie geschah, aus molaren Vorgängen allein auf molekulare zu schließen.

Diese Korrektur des Einsteinschen Gesetzes kommt aber nur in zweiter Linie in Betracht für jene Frage, die ich mir in bezug auf das Wesen der Elektrizität gestellt habe.

Die auf Grund dieser Formel gerechneten Ladungen ergeben jedenfalls eine obere Grenze, so daß alle meine folgenden Schlüsse von dieser Frage unberührt bleiben.

b) In dieser Abhandlung waren die zwei Fragen gestellt: *Tritt die Elektrizität überhaupt quantenhaft auf und ist dieses Quant nach unten durch die Ladung des einwertigen Wasserstoff-*

bedeutet, bei welcher das Kügelchen schwebt. Es ergibt sich z. B. für Kügelchen Nr. 1 die linke obige Beziehung aus den Versuchen zu $109,7 \cdot 10^{-4}$ cm/sec, die rechte zu $110,0 \cdot 10^{-4}$ cm/sec. Bei Partikel Nr. 1 liegt die linke Seite aus den Grenzen der Schwebespannung errechnet zwischen $86,4$ und $89,4 \cdot 10^{-4}$ cm/sec, die rechte wurde zu $87,9 \cdot 10^{-4}$ cm/sec bestimmt. Ebenso bei allen übrigen Partikeln. Diese Beziehung ist also exakt erfüllt.

1) Vgl. F. Ehrenhaft, Sur les quantités minima d'électricité. C. R. T. 158. No. 15. p. 1079.

ions oder -Elektrons (Elementarquantums) begrenzt oder gibt es kleinere Ladungen als dieses.

Gegen die positive Beantwortung der ersten von diesen beiden Fragen liegt, was das Auftreten von Quanten in Gasen anbelangt, nichts vor. Denn es ist in dieser Studie gelungen, jede der Ladungen, die ein und dasselbe Hg-Tröpfchen hintereinander angenommen hat, zwischen zwei Grenzen einzuengen, deren jede eine Zahl einschließt, welche sich zu je einer von zwei anderen Grenzen eingeschlossenen Zahl in ein einfaches ganzzahliges Verhältnis bringen läßt.

Es kann demnach eine gesetzmäßige Beziehung zwischen den Größen der Ladungswerte, die dasselbe Metallkugélchen bei Umladungen in Gasen nacheinander annimmt, deduziert werden; denn es lassen sich diese Ladungswerte an einem und demselben Partikel als ein, wenigstens bei der heute erreichbaren Genauigkeit, einfaches Vielfaches einer Ladung ansprechen.

Ganz anders aber steht es um die zweite Frage. Die Ladung des einwertigen Wasserstoffiones müßte nach den Gesetzen der Elektrolyse, zufolge der Loschmidt-schen Zahl $N = 70,5 \cdot 10^{22}$ etwa $4,1 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. betragen.

Von den gemessenen bzw. als in der Natur existierend erschlossenen 16 Ladungswerten dieser Abhandlung an Quecksilberkugélchen von oben angegebener Größe in reiner Kohlensäure und reinem Stickstoff unterschreiten aus der oberen Grenze der Widerstandsgesetze¹⁾ geschlossen 14, aus der unteren Grenze²⁾ alle 16 das Elektron.

Aus der Einsteinschen Formel für die Brownsche Bewegung unterschreiten unter 9 Partikeln (denn nur so viele können aus den p. 691 angegebenen Gründen hier herangezogen werden) die von 8 Teilchen getragenen Ladungen die Ladung des Wasserstoffiones; die Ladungen des übrigen bestimmt sich zu $4,4 \cdot 10^{-10}$ e. st. E.

Das Produkt N. e., das elektrochemische Äquivalent, ergibt sich aus den Rechnungen zufolge der Brownschen Bewegung direkt.³⁾ Dieses ist aber nicht wie bei der Elektrolyse durchaus 96 500 Coulombs, sondern fast durchaus kleiner bis zu 19 700 Coulombs also bis zu fünfmal kleiner.

Die kleinste Ladung aus den Widerstandsgesetzen berechnet

1) Zu dieser Widerstandsformel hält sich R. A. Millikan für berechtigt.

2) Diese Korrektur dagegen hält J. Roux für richtig.

3) Evident durch Substitution von Gleichung (II) in (I).

liegt zwischen $1,4$ und $2,8 \cdot 10^{-11}$ e. st. E. aus der Brownschen Bewegung erschlossen, bei $8,4 \cdot 10^{-11}$ e. st. E.

Ob diese Ladung aber schon die kleinste ist, die existiert, ist hier noch nicht entschieden, wenn auch aus den in dieser Studie erschlossenen Radien noch immer ein Abnehmen des Quants mit dem Radius¹⁾ sich zeigt. Eine im Gange befindliche Untersuchung beweist vielmehr die Existenz von noch viel kleineren Quanten.

In dieser Arbeit habe ich mich im allgemeinen mit etwas größeren Kügelchen befaßt als ich es früher tat, da die Teilchen sogar noch im Mikroskope auflösbar und nicht die kleinsten waren, welche die photographische Platte noch abbildet. Ich hinsomit hier noch nicht an die unterste Grenze des optisch Möglichen gegangen. Oberwähnte Untersuchung erstreckt sich auf dieses Gebiet.

Es drängt sich nun die Frage auf, ob sich ein einziges Quant, wofern es überhaupt existiert, mit genügender Sicherheit feststellen lassen wird, als dessen Vielfaches die Ladungswerte aller Partikeln sich darstellen lassen werden; diese Frage ist gleichbedeutend mit der nach der Existenz eines Elektrizitätsatoms.

Diese ist im bejahenden Sinne zu beantworten, wenn sich ein Quant finden lassen wird, das immer und immer wieder in allen Gasen und auf allen Metallen und allen Nichtmetallen, Dielektrizis und Flüssigkeiten unabhängig von der Materie und von der Erzeugungsart der Ladung bei allen möglichen Kombinationen der physikalischen Bedingungen sich stets gleich ergeben wird.

Vom Standpunkte der vorliegenden Untersuchung wäre aus ein solches Quant höchstens in der Ordnung 10^{-11} e. st. E. zu suchen.

Die bei größeren Partikeln unter gewissen Umständen bei gleicher Art der Erzeugung häufig wiederkehrenden höheren Quanten wären dann etwa als stabilere räumliche Gleichgewichtsverteilungen dieser „Subelektronen“ anzusehen, die sich unter gewissen Umständen ergeben.

Für diese Auffassung scheint manches zu sprechen. Das Kügelchen VII, mit einem Halbmesser von der halben Wellenlänge des langwelligen ultravioletten Lichtes ($a = 1,9 \cdot 10^{-5}$ cm) wurde über 3 Stunden lang beobachtet. Es nahm immer wieder (fünfmal positiv und negativ) einen Ladungswert an, der aus den Schwebungen mindestens als doppeltes Quant be-

1) F. Ehrenhaft, Atomist. Konstitution der Elektrizität, Phys. Zeitschr. 12. p. 103. 1910.

zeichnet werden muß. Es war schwierig auf dieses Partikel durch Ionisierung der Luft im Kondensator eine andere Ladung zu bringen als dieses doppelte Quant. Von dem einfachen oder dreifachen Quant (ein höherer Wert als letzterer konnte nicht erreicht werden) sprang es *sofort* bei kurz geschlossenem Kondensator, also wenn freie Elektrizitätsmengen im Kondensator verbleiben konnten, auf einen stabilen Ladungswert um. *Aus dem Auftreten von Quanten der Elektrizität unter Gleichung gewisser physikalischer Umstände allein, kann eben auf ein unteilbares Elektron noch nicht geschlossen werden.*

Alle meine Schlüsse will ich natürlich nur mit der Sicherheit behaupten, welche die Voraussetzungen haben, auf welchen sie beruhen.

Sie ergeben sich sowohl unter Voraussetzung der Widerstandsgesetze als auf Grund der Theorie der Brownschen Bewegung nach Einstein. Es ist mehr als unwahrscheinlich, daß diese Voraussetzungen beide versagen sollten, um so mehr als sie in einem großen Bereiche schöne Übereinstimmung geben.

Diese beiden Berechnungsmethoden scheinen sich auf diese Weise wechselseitig sehr zu stützen, da sie völlig unabhängig voneinander sind; denn die eine schließt aus gewissen Mittelwerten der Messungen, während für die andere gerade die Abweichungen von den Mittelwerten charakteristisch werden; und schließlich sind beide, was sehr wichtig erscheint, bestätigt durch den optischen Befund.¹⁾

Wien, I. Physik. Institut der K. K. Universität.

1) Im zweiten Teile meiner vorzitierten Abhandlung in den Wiener Akademieberichten 1914 habe ich die nach meiner Methode geführten Untersuchungen über das Elementarquantum von K. Przibram, R. A. Millikan und H. Fletcher, E. Regener, E. Weiß, J. Roux, A. Mayer einer Besprechung unterzogen und nachgewiesen, daß auch aus diesen Abhandlungen auf ein *Elementarquantum* der Elektrizität bei $4,7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. nicht geschlossen werden kann. Ferner habe ich auf A. Joffé, Edgar Meyer u. W. Gerlachs Mitteilungen über den photoelektrischen Effekt an kleinen Metallpartikeln Bezug genommen. Schließlich habe ich an dieser Stelle die Einwendungen, welche J. Perrin u. A. Einstein auf *Réunion tenue à Bruxelles 1911* sous les auspices de M. E. Solvay gegen meine Methode und Untersuchungen vorbrachten, aufgeklärt und widerlegt.

2. Relativitätsprinzip und beschleunigte Bewegung;

von *Friedrich Kottler.*

(Hierzu Tafel XV u. XVI, Tabelle 1 u. 2.)

In der vorliegenden Arbeit wird der Versuch gemacht, die Lorentztransformation von der geradlinig gleichförmigen Bewegung auf gewisse beschleunigte Bewegungen zu übertragen. Dabei ist gemeint, es möchte ein Beobachter, der an einer solchen beschleunigten Bewegung teilnimmt, mit Hilfe eines geeigneten mitbewegten Bezugssystems in den Stand gesetzt sein, sich selbst in Ruhe vorzustellen und Gegenständen, die nicht an der Bewegung teilnehmen, scheinbare Beschleunigungen zuzuschreiben. Aus erkenntnistheoretischen und physikalischen Gründen ist zunächst an Stelle des obigen Bezugssystems ein Bezugskörper zu setzen. Für diesen aber ist zu fordern, wenn der Beobachter nicht an den Veränderungen der Ruhegestalt seine Bewegung erkennen soll, daß er sich wie ein Bornscher starrer Körper bewege. Von den beiden Typen dieses Körpers, die Herglotz angegeben hat, ist aber, wenn die Konstanz der „Eigenkoordinaten“ auch „nichtgleichzeitiger“ Punkte des Körpers gefordert wird, nur der zweite zu gebrauchen, dessen Weltlinien bekanntlich die Bahnkurven einer eingliedrigen orthogonalen Transformationsgruppe des Minkowskischen S_4 sind. Als das gewünschte verallgemeinerte mitbewegte System ergibt sich dann sofort das begleitende Vierkant der Weltlinie des Beobachters. In diesem verhalten sich die Maxwell'schen Grundgleichungen invariant, woraus geschlossen wird, daß, wenn einmal Kräftegleichgewicht auf dem Bezugskörper eingetreten, dieses während der ganzen Bewegung erhalten bleibt.

Die Natur dieser beschleunigten Bewegungen erhellt aus dem Umstande, daß sie die relativistische Verallgemeinerung derjenigen der Newton'schen Mechanik darstellen, die sich

mit konstanter Beschleunigung vollziehen, also der *geradlinigen gleichförmigen Translation, des freien Falls, der gleichförmigen Rotation und deren Kombinationen*. Die eben erwähnte Erhaltung des Gleichgewichts wird so verständlich. Um nun auch auf Grund der relativistischen Dynamik die Entstehung jener ausgezeichneten Bewegungen — am Elektron — zu erklären, wird für dieses ein Modell aufgestellt, das den üblichen Vorstellungen der elektromagnetischen Mechanik entspricht und daher wie diese, sofern die Maxwellschen Gleichungen auf sein Inneres anwendbar sind, an dem seit Abraham und Poincaré bekannten Übelstande krankt, wie seine Kohäsion zu erklären sei. Die hier zu Hilfe genommene Hypothese besagt die Hinzufügung solcher elastischer Spannungen, die die Maxwellschen Spannungen neutralisieren, so daß bei Kräftegleichgewicht unter Berücksichtigung auch des äußeren Feldes die einzelnen Teilchen der Ladung als gegeneinander indifferent anzusehen sind. Dann ergeben sich die besagten Bewegungen als diejenigen, die das Elektron in einem räumlich und zeitlich konstanten äußeren elektromagnetischen Feld vollführt. Dabei wird angenommen, daß die Bewegung von aller Ewigkeit her bis in alle Ewigkeit vor sich geht; würde nur ein Teil der Bewegung realisiert, wie bei den Ablenkungsversuchen der Kathodenstrahlen, so ist selbstredend für den Übergang in die Bewegung anzunehmen, daß Deformationen des Körpers vorkommen, wie ja überhaupt die Bewegung des Bornschen Körpers nicht als Zwangsmechanismus, sondern einfach als ausgezeichnete Bewegung aufzufassen ist, da insbesondere diejenige des Körpers zweiter Art sich, wie gezeigt, „von selbst“ erhält. Für das obige Modell des Elektrons folgt auch, daß diese Bewegungen ohne Ausstrahlung vor sich gehen können, was von seiten der Theorie der Magnetisierungselektronen eine bekannte Stütze erhält. Jedoch ist die Lösung des Problems der natürlichen Kohäsion der Elektrizität, wenn ohne elastische Hilfsspannungen möglich, nur von einer Abänderung der Grundgleichungen zu erwarten.

In weiterer Verfolgung der aufgestellten Verallgemeinerung der Lorentztransformationen wird am Beispiel der gleichförmigen Rotation, die zu den ausgezeichneten Bewegungen zählt, gezeigt, daß sich das Bezugssystem von dem mitbewegten

System der alten Mechanik ebenso wie beim gewöhnlichen Lorentzschen Fall nur um Größen zweiter Ordnung unterscheidet, weshalb Rotationseffekte erster Ordnung zu einer Entscheidung gegen das Relativitätsprinzip, wie man dies letzthin versucht hat, überhaupt nicht heranzuziehen sind. Daß solche vorkommen müssen, daß ferner der Beobachter mit Hilfe physikalischer Experimente seine beschleunigte Bewegung erkennen kann, ist selbstverständlich, da ja auch die alte Mechanik solche kennt.

Endlich wird darauf eingegangen, wie sich dem bewegten Beobachter die Welt darstellt; es wird für seine unmittelbare Umgebung Invarianz der Lichtgeschwindigkeit, nicht aber für die weitere Umgebung gezeigt. Am Beispiel der Bornschen Hyperbelfallbewegung wird gezeigt, wie die Lichtgeschwindigkeit von dem auf das Eigensystem bezogenen Kraftpotential der scheinbaren Beschleunigung abhängt.

In einem Anhang werden Formeln der Differentialgeometrie gegeben, die zu einem weiteren Ausbau der Minkowskischen Kinematik unumgänglich scheinen, sowie auch der Zusammenhang der Minkowskischen Weltlinie mit dem Hamiltonschen Hodographen der Geschwindigkeit besprochen.¹⁾

Bezeichnungen.

$x^{(1)} x^{(2)} x^{(3)} x^{(4)}$ Koordinaten des S_4 .²⁾ Tiefgestellte Indizes werden im folgenden niemals Koordinatenindizes sein. Z. B. bedeutet c_1 einen Vektor mit den Komponenten $c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)} c_1^{(4)}$.

$x y z t$ Koordinaten und Zeit des S_3 , in welchem auch die üblichen Bezeichnungen der dreidimensionalen Vektoranalysis verwendet werden.

Der Index 4 bezeichnet im begleitenden Vierkant keine zeitartige Richtung; d. h. $c_4^{(1)} c_4^{(2)} c_4^{(3)} c_4^{(4)}$ sind die Richtungskosinusse der vierten Achse dieses Vierkants, wobei diese aber raumartig ist.

1) Man vgl. für das Folgende insbesondere: G. Herglotz, Ann. d. Phys. (4.) 31. p. 393. 1910: Relativitätsprinzip und starrer Körper. F. Kottler, Über die Raumzeitlinien der Minkowskischen Welt, Wien. Ber. IIa. Oktober 1912. §§ 6—8. — In der letzteren Arbeit bereits die Resultate der vorliegenden § 5 Punkt 7 und des Anhangs 1 bis 2.

2) Diese Bezeichnung rührt vom absoluten Differentialkalkül her. F. Kottler, I. c. §§ 1—3.

Ausführliche Inhaltsangabe.

§ 1. Die Bahnkurven einer eingliedrigen orthogonalen Transformationsgruppe des Minkowskischen S_4 .

1. Die infinitesimale Transformation. — 2. Parameterdarstellung der Bahnkurven. — 3. Insichverschiebbarkeit derselben. Konstante Krümmungen. — 4. Äquidistanz charakteristisch für Zugehörigkeit zu einer orthogonalen Schar. — 5. Kanonische Formen der infinitesimalen Transformation. Integration.

§ 2. Kinematik der Weltlinien konstanter Krümmungen.

1. Beschränkungen der Integrationskonstanten wegen Zeitartigkeit. — 2. Minkowskis Kinematik und die Differentialgeometrie. — 3. Minkowskis Bewegungsgleichungen und Kraft für den Massenpunkt. — 4. 5. Minkowskische Kraft, Hauptnormale und erste Krümmung der Weltlinie. — 6. Zusammenhang der zweiten und dritten Krümmung mit Krümmung und Torsion des Hamiltonschen Hodographen der Geschwindigkeit. — 7. Hieraus die Newtonschen Analoga zu den Weltlinien konstanter Krümmungen: freier Fall, gleichförmige Rotation, gleichförmige Translation und Kombinationen. — 8. Die Beschleunigung ist der Kraft im Allgemeinen nicht parallel: Auftreten eines Widerstandes in Richtung der Bewegung. — 9. Hieraus für den horizontalen Wurf im konstanten Schwerfeld: Allmähliche Reduktion der Fallbeschleunigung, Aufzehrung der Wurfgeschwindigkeit. An Stelle der Parabel die stärker gekrümmte Kettenlinie. — 10. Bei gleichförmiger Rotation verschwindet dieser Widerstand. Daher unverändert. — 11. Fallendes rotierendes System: Verlangsamung der Rotation bis zu gänzlichem Stillstand nach unendlich langer Zeit.

§ 3. Dynamik der Weltlinien konstanter Krümmungen.

1. Elektromagnetisches Modell der Materie. — 2. Hypothese über die Kohäsion der Elektrizität: Nordströmscher Tensor: Verschwinden der Ruhdeformationen. — 3. Nordströms Tensor und starrer Körper. — 4. Das Zustandekommen dieses von Relativspannungen freien Zustandes bleibt unerörtert. — 5. Konstantes äußeres elektromagnetisches Feld: die Bewegungsgleichungen, einmal integriert, geben eine orthogonale infinitesimale Transformation. — 6. Übertragung der kanonischen Typen des § 1 auf das Feld. — 7. Sind diese Resultate auf die Ablenkungsversuche der Kathodenstrahlen anwendbar? — 8. Hinweis auf Schotts Buch.

§ 4. Die Weltlinienschar konstanter Krümmungen in der Darstellung durch das begleitende Vierkant einer Linie.

1. Ein durch Invarianz ausgezeichnetes, „mitbewegtes“ System. — 2. Definition des begleitenden Vierkants. Die Frenetsche infinitesimale orthogonale Transformation. — 3. Sie ist identisch mit der Transformation, welche die Weltlinien erzeugt. — 4. Im begleitenden Vierkant einer Linie stellen sich „mitbewegte“ Punkte, deren Weltlinien nach 3. zur

Schar gehören, durch *konstante* Koordinaten dar. — 5. Der Bornsche starre Körper zweiter Art (vermittels geeigneter Zuordnung) besitzt diese Weltlinien. — 6. Darstellung der Typen des § 1 in dieser Form: Beispiel.

§ 5. Das begleitende Vierkant als „mitbewegtes“ System im Sinne Lorentz’.

1. Das Bezugssystem ist starr nach Born zweiter Art. — 2. In ihm scheint dem bewegten Beobachter der Körper zu ruhen: sowohl für die „gleichzeitigen“ als auch 3. die ungleichzeitigen Positionen, wobei als Zeitkoordinate die Eigenzeit verwendet wird. — 4. Nur bei diesen Weltlinien sind alle Punkte des Bezugskörpers gleichwertig. — 5. Nur bei diesen Weltlinien bleibt Kräftegleichgewicht, das einmal auf dem Bezugskörper eingetreten, ewig erhalten. — 6. Das elektromagnetische Modell § 3 daher strahlungsfrei: Magnetisierungselektronen! — 7. Nachweis der Invarianz der Schwarzschildschen Formeln für das Elementarfeld im begleitenden Vierkant.

§ 6. Bewegungen relativ zum Bezugskörper. Verallgemeinerung des Einsteinschen Additionsgesetzes der Geschwindigkeiten.

1. Bewegungen relativ zum Bezugskörper erfahren selbstverständlich scheinbare Beschleunigungen, woraus der Beobachter wie beim Foucaultschen Versuch die eigene Bewegung erkennen kann. Relativität der Beschleunigung nur für Ruhe. — 2. Die gewöhnliche Lorentztransformation (Typ V) und das gewöhnliche Einsteinsche Additionsgesetz in dieser Darstellung. — 3. Gleichförmige Rotation — das gefundene Additionsgesetz unterscheidet sich von dem der klassischen Mechanik durch Größen zweiter Ordnung. Der Sagnaceffekt ist erster Ordnung, wird also auch von der Relativitätstheorie verlangt. — 4. Invarianz der Lichtgeschwindigkeit nur in der unmittelbaren Umgebung des Beobachters.

§ 7. Anhang.

1. Aus der Differentialgeometrie der Weltlinien. — 2. Weltlinie und Hamiltons Hodograph. — 3. Eigensysteme. Sie müssen starr sein im Bornschen Sinne. — 4. Veränderung der Lichtgeschwindigkeit in einem in Bornscher Fallhyperbelbewegung begriffenen System.

§ 1. Die Bahnkurven einer eingliedrigen orthogonalen Transformationsgruppe des Minkowskischen S_4 .

1. Jede *endliche* Transformation, die von *einem* Parameter abhängt, kann aufgebaut werden aus sukzessiven Anwendungen der ihr zugrundeliegenden *infinitesimalen* Transformation; bei einer (eigentlichen) orthogonalen hat diese letztere die folgende Gestalt:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx^{(1)}}{du} = \varepsilon^{(1)} + \bullet + \varepsilon_2^{(1)} x^{(2)} + \varepsilon_3^{(1)} x^{(3)} + \varepsilon_4^{(1)} x^{(4)} \\ \frac{dx^{(2)}}{du} = \varepsilon^{(2)} + \varepsilon_1^{(2)} x^{(1)} + \bullet + \varepsilon_3^{(2)} x^{(3)} + \varepsilon_4^{(2)} x^{(4)} \\ \frac{dx^{(3)}}{du} = \varepsilon^{(3)} + \varepsilon_1^{(3)} x^{(1)} + \varepsilon_2^{(3)} x^{(2)} + \bullet + \varepsilon_4^{(3)} x^{(4)} \\ \frac{dx^{(4)}}{du} = \varepsilon^{(4)} + \varepsilon_1^{(4)} x^{(1)} + \varepsilon_2^{(4)} x^{(2)} + \varepsilon_3^{(4)} x^{(3)} + \bullet \end{cases}$$

Hierin sind die $\varepsilon^{(h)}$ und $\varepsilon_k^{(h)}$ *Konstanten*, die nur den Bedingungen genügen müssen: (a) $\varepsilon_k^{(h)} = -\varepsilon_h^{(k)}$, (b) $\varepsilon_4^{(1)}, \varepsilon_4^{(2)}, \varepsilon_4^{(3)}$ sowie $\varepsilon^{(4)}$ rein imaginär, die übrigen reell; (c) $\varepsilon^{(4)}/i > 0$. Der Parameter der Transformation ist u .

2. Die Gleichungen (1) ordnen offenbar jedem Punkt eine Fortschreitungsrichtung zu, längs welcher er seine konsekutive Lage auf der Bahnkurve, die ihm vermöge der Transformation eindeutig zugeordnet ist, erreicht. Die Bahnkurve erhält man daher durch Integration von (1) in der Form

$$(2) \quad x = x(a, b, c, u).$$

Dabei sind a, b, c gewisse Integrationskonstanten, die etwa die Anfangslagen für $u = 0$ charakterisieren.

Diese Anfangslagen erfüllen eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, die durch die Transformation (1) sukzessive in ∞^1 andere Mannigfaltigkeiten $u = \text{const}$ übergeht, die alle untereinander kongruent sind.

3. Diese ausgezeichnete Eigenschaft kommt allgemein jeder Transformation (1) und nur einer solchen zu, (1) stellt eben darum eine „Insichverschiebung“ oder „Bewegung“ des S_4 dar. Die zu (1) gehörige Schar von ∞^3 Bahnkurven kann in sich verschoben werden; es besitzt daher jede Kurve der Schar, wie aus den natürlichen Gleichungen der Differentialgeometrie sofort abzuleiten, die Eigenschaft: *Die drei Radien der Krümmungen¹⁾ sind längs einer Kurve der Schar (aber nicht etwa von Kurve zu Kurve) konstant*, d. h. die „innere Gestalt“ der Kurve ist überall dieselbe.

1) Anhang 1.

4. Die Transformation (1) liefert also eine ganze Schar von ∞^3 solcher Kurven. Umgekehrt, damit eine vorgegebene Schar von ∞^3 Kurven konstanter Krümmungen zu einer Transformation (1) gehöre, ist notwendig, daß gewisse Bedingungen erfüllt seien. Nimmt man das Beispiel der Ebene, so hat hier die zu (1) analoge Transformation ∞^1 Kreise zu ihren Bahnen. Die Bedingung dafür, daß eine Schar von ∞^1 Kreisen Bahnkurven einer eingliedrigen orthogonalen Transformationsgruppe sei, ist bekanntlich die, daß die Kreise konzentrisch sind. Allgemein zureden hat man als charakteristische Eigenschaft dafür, daß eine Schar von ∞^3 Kurven konstanter Krümmungen des S_4 zu einer Transformation (1) gehöre, die Äquidistanz¹⁾. Sind nämlich $x_0 = x(a, b, c, u_0)$ und $X_0 = X(A, B, C, U_0)$ zwei beliebige Punkte zweier beliebiger Kurven der Schar, so muß, wenn x_0 seine Kurve $x(a, b, c, u)$ und X_0 seine Kurve $X(A, B, C, u)$ durchläuft, für irgend zwei zusammengehörige Punkte sich stets die gleiche Entfernung ergeben. Die Zusammengehörigkeit der Punkte wird hierbei dadurch angegeben, daß u_0 und U_0 beide das gleiche Inkrement Δu erfahren. Da wir nämlich von Anfangslagen x_0 bzw. X_0 ausgingen, die zu verschiedenen Parameterwerten u_0 bzw. U_0 gehören, können wir nach Anbringung einer endlichen Transformation auf diese nicht Punkte mit gleichen Parameterwerten als zusammengehörig ansehen, sondern Punkte mit Parameterwerten u bzw. U , wo

$$u = u_0 + \Delta u \quad \text{bzw.} \quad U = U_0 + \Delta u,$$

so daß die Differenz

$$u - u_0 = U - U_0$$

als Konstante behandelt werden kann. Denkt man sich die Kurve $X(A, B, C, u)$ in sich verschoben, wobei nach Absatz 3 sich äußerlich am Aussehen der Kurvenschar nichts ändern wird, so kann man es offenbar erreichen, daß $U_0 = u_0$ wird, wodurch das obige seine Rechtfertigung findet. Die Bedingung der Äquidistanz und mithin der Zugehörigkeit zu einer Trans-

1) Im weiteren Sinne; also nicht bloß Normaläquidistanz, wie bei Herglotz, l. c.

formation (1) lautet sonach für die vorgegebene Kurvenschar konstanter Krümmungen:

$$\sum_{h=1}^4 \{X^{(h)}(A, B, C, U_0 + \Delta u) - x^{(h)}(a, b, c, u_0 + \Delta u)\}^2 \\ = \sum_{h=1}^4 \{X^{(h)}(A, B, C, U_0) - x^{(h)}(a, b, c, u_0)\}^2,$$

welches auch X_0 und x_0 und Δu sein mögen.

5. Behufs Integration der Differentialgleichungen (1) und Darstellung der endlichen Gleichungen der Bahnkurven hat man nun offenbar die einfachsten, aber typischen Fälle heranzuziehen. In der Tat kann man immer durch eine orthogonale Transformation des S_4 die Matrix $\varepsilon_k^{(h)}$ auf gewisse *kanonische Formen* reduzieren, d. h. solche, wo möglichst viele $\varepsilon_k^{(h)}$ verschwinden.¹⁾ Nur an diesen kanonischen Formen wird die Integration im folgenden durchgeführt und die Untersuchung wird sich auch weiter nur an diese knüpfen. Es steht natürlich jeweils frei, die so erhaltenen Resultate durch orthogonale Transformation rückwärts auf beliebige Gestalt der $\varepsilon_k^{(h)}$ zu übertragen. Diese kanonischen Formen ermittelt man nun am kürzesten mit Hilfe der Theorie der *Elementarteiler*.²⁾ Man betrachtet hierbei die charakteristische Determinante

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} \rho & \varepsilon_2^{(1)} & \varepsilon_3^{(1)} & \varepsilon_4^{(1)} \\ \varepsilon_1^{(2)} & \rho & \varepsilon_3^{(2)} & \varepsilon_4^{(2)} \\ \varepsilon_1^{(3)} & \varepsilon_2^{(3)} & \rho & \varepsilon_4^{(3)} \\ \varepsilon_1^{(4)} & \varepsilon_2^{(4)} & \varepsilon_3^{(4)} & \rho \end{vmatrix} = \rho^4 + E\rho^2 + E^2$$

worin $E = (\varepsilon_2^{(1)})^2 + (\varepsilon_3^{(1)})^2 + (\varepsilon_3^{(2)})^2 + (\varepsilon_4^{(2)})^2 + (\varepsilon_4^{(3)})^2$

und $E = \varepsilon_2^{(1)} \varepsilon_4^{(3)} + \varepsilon_3^{(1)} \varepsilon_2^{(4)} + \varepsilon_4^{(1)} \varepsilon_3^{(2)}$.

1) Beispiel einer Reduktion auf kanonische Form: Transformation der Flächen zweiten Grades auf ihre Hauptachsen.

2) P. Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler. Leipzig, Teubner, 1899.

die beiden Invarianten gegen orthogonale Transformationen der Determinante

$$| \varepsilon_k^{(h)} | \quad h, k = 1, 2, 3, 4$$

sind und bestimmt die Wurzeln von

$$D(\varrho) = \varrho^4 + E\varrho^2 + E^2 = 0.$$

Seien

$$-\varrho_1 = \varrho_2 \quad \text{bzw.} \quad -\varrho_3 = \varrho_4$$

diese Wurzeln, so liefert ihre Einfachheit bzw. Vielfachheit (im letzteren Falle auch ihre Vielfachheit als Wurzeln der sämtlichen Unterdeterminanten der verschiedenen Grade) alles für eine Klassifikation Nötige. Man findet so unter Rücksichtnahme auf die Bedingungen (a), (b), (c) (Absatz 1) unter Weglassung alles Unwesentlichen die kanonischen Formen:

(I) alle Wurzeln einfach; lauter einfache Elementarteiler. Bezeichnung [1111] $-\varrho_1 = +\varrho_2 = i\lambda$; $-\varrho_3 = +\varrho_4 = 1$

$$dx^{(1)} = -\lambda x^{(2)} du, \quad dx^{(2)} = \lambda x^{(1)} du, \quad dx^{(3)} = -i x^{(4)} du, \\ dx^{(4)} = i x^{(3)} du.$$

(II) $\varrho_3 = \varrho_4 = 0$ (Doppelwurzel); alle Unterdeterminanten dritten Grades müssen dann (infolge Bedingung a) mindestens einfach verschwinden. Der Doppelwurzel $\varrho = 0$ kommen dann zwei einfache Elementarteiler zu: $-\varrho_1 = \varrho_2 = i\lambda$. [11 (11)]

$$dx^{(1)} = -\lambda x^{(2)} du, \quad dx^{(2)} = \lambda x^{(1)} du, \quad dx^{(3)} = \beta du, \quad dx^{(4)} = i du.$$

(III) $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, $-\varrho_3 = \varrho_4 = 1$ wie früher, nur durch die verschiedenen Realitätsverhältnisse in der $x^{(1)} x^{(2)}$ bzw. $x^{(3)} x^{(4)}$ -Ebene verschieden. [(11) 11]

$$dx^{(1)} = \alpha du, \quad dx^{(2)} = 0, \quad dx^{(3)} = -i x^{(4)} du, \quad dx^{(4)} = i x^{(3)} du.$$

(IV) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0$ (vierfache Wurzel); die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden mindestens einfach. Zur Wurzel $\varrho = 0$ also ein dreifacher und ein einfacher Elementarteiler [(31)]

$$dx^{(1)} = (-x^{(3)} - i x^{(4)}) du, \quad dx^{(2)} = 0, \quad dx^{(3)} = x^{(1)} du, \\ dx^{(4)} = i(x^{(1)} + \alpha) du.$$

(V) $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho_3 = \varrho_4 = 0$ (vierfache Wurzel); die Unterdeterminanten dritten Grades verschwinden mindestens dreifach, die zweiten mindestens zweifach, die ersten einfach. Vier einfache Elementarteiler $[(1111)]$

$$dx^{(1)} = 0, \quad dx^{(2)} = 0, \quad dx^{(3)} = \beta du, \quad dx^{(4)} = i du.$$

Die hierin auftretenden Spezialisierungen der „Schiebung“ $\varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(3)}\varepsilon^{(4)}$ wurden vorgenommen mit Rücksicht auf Bedingung (c) und die Wesentlichkeit ihrer Beibehaltung.

Nunmehr ist die Integration von (1) leicht. Sie ergibt eine Parameterdarstellung nach Art von (2), wenn gewisse Integrationskonstanten in geeigneter Weise gewählt werden. Die Resultate vgl. Tab. 1, Kol. 2.

§ 2. Kinematik der Weltlinien konstanter Krümmungen.

1. Die gefundenen Kurven liefern uns nunmehr sofort die gewünschten beschleunigten Bewegungen, wenn wir sie als Weltlinien im Minkowskischen Sinne interpretieren. Hierzu ist nur notwendig, daß die Tangente einer solchen Kurve stets zeitartige Richtung haben soll, weshalb die Integrationskonstanten noch bezüglich Bedingungen zu unterwerfen sind (Tab. 1, Kol. 7).

2. Die Minkowskische Kinematik ist nun eine reine *Differentialgeometrie* der Weltlinien; in der Tat ist die Beseitigung der ausgezeichneten Rolle, welche die Zeit in der gewöhnlichen Kinematik spielt, notwendig, damit die Kinematik eine Geometrie der Bewegungen mit vollem Recht genannt werden könne. Da dies nun bei Minkowski der Fall ist, wird man versuchen, die Formeln der Differentialgeometrie des S_4 für die Zwecke physikalischer Erkenntnis heranzuziehen.

3. Die Minkowskischen Bewegungsgleichungen für den Massenpunkt lauten

$$m_0 \frac{d^3 x^{(h)}}{d\tau^3} = K^{(h)}, \quad h = 1, 2, 3, 4.$$

Hierin ist m_0 die Ruhmasse, $d\tau = dt\sqrt{1-v^2/c^2}$ ist das Element der Eigenzeit und v die gewöhnliche Newtonsche Geschwindigkeit, d. h.

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

K endlich ist die Minkowskische Viererkräft bezogen auf das Element des *Ruhvolumens*. Wenn \mathfrak{K} die gewöhnliche Newtonsche Kräft ist, so gilt bekanntlich

$$K^{(1)} = \frac{\mathfrak{K}_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \text{ usw. ,}$$

$$K^{(4)} = \frac{i}{c} \frac{(\mathfrak{K} v)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} .$$

Diese Bewegungsgleichungen lassen nun bekanntlich die folgende Interpretation zu:

4. Im S_4 mit der Maßbestimmung

$$d\sigma^2 = - (dx^{(1)})^2 - (dx^{(2)})^2 - (dx^{(3)})^2 - (dx^{(4)})^2$$

$$= - dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2$$

ist der Bogen längs der Weltlinie:

$$d\sigma = c d\tau ;$$

dann lauten die Bewegungsgleichungen Minkowskis

$$\frac{d^2 x}{d\sigma^2} = \frac{K}{m_0 c^2} .$$

Nun aber ist die linke Seite abgesehen vom Vorzeichen bekanntlich nichts anderes als der Einheitsvektor der *Hauptnormale* gebrochen durch den Radius der ersten Krümmung.¹⁾ Ähnlich also wie die dreidimensionale Zentripetalkräft nach dem Krümmungsmittelpunkte einer Newtonschen Bahnkurve weist, wobei ihr Betrag dem Krümmungsradius verkehrt proportional ist.

5. Aus dem § 1 wissen wir nun, daß die erste Krümmung der von uns betrachteten Weltlinien konstant ist. Hieraus folgt:

Bei einer Bewegung von dieser Art ist der Betrag der Minkowskischen Viererkräft konstant.

Dieser Betrag, geteilt durch m_0 , also

$$\frac{|K|}{m_0}$$

heißt die *Eigenbeschleunigung* des Massenpunktes; denn wenn der Punkt auf Ruhe transformiert wird, so stellt sich im neuen System seine Beschleunigung der Größe und Richtung

1) Anhang. Hier wird übrigens das Bogenesetz $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2$ also $ic d\tau$ als Bogen der Weltlinie verwendet.

nach genau als die Minkowskische Kraft geteilt durch m_0 , deren vierte Komponente hier selbstredend verschwindet, dar.

6. Nicht so einfach wie die erste Krümmung, welche nach dem vorigen $1/c^2$ mal die Eigenbeschleunigung darstellt, interpretieren sich die zweite und dritte Krümmung. Man wird vermuten, da sie für eine ebene bzw. geradlinige Bewegung des Newtonschen S_3 bei den im S_4 entsprechenden Weltlinien verschwinden, daß es sich hierbei um die Stellung handelt, die konsekutive Beschleunigungen zueinander einnehmen. Betrachtungen solcher Art stellt die klassische Mechanik an, indem sie den *Hamiltonschen Hodographen der Geschwindigkeit*

$$v_x = v_x(t), \quad v_y = v_y(t), \quad v_z = v_z(t)$$

als Kurve konstruiert; die Beschleunigung zeigt dann jeweils der Tangente parallel, die wechselnden Lagen der Beschleunigung werden dann offenbar durch die gewöhnliche dreidimensionale Krümmung bzw. Torsion des Hamiltonschen Hodographen gegeben.

Nun findet man leicht¹⁾ aus den Formeln der vierdimensionalen Differentialgeometrie: *Die zweite bzw. dritte Krümmung in einem Punkte der Weltlinie sind gleich der Krümmung bzw. Torsion des zugehörigen Hamiltonschen Hodographen mal $1/c$ der Eigenbeschleunigung, wenn dieser Hodograph in einem System betrachtet wird, in welchem der Punkt augenblicklich ruht.*

7. Um nun eine anschauliche Vorstellung von der Natur der betrachteten Bewegungen zu gewinnen, wollen wir einen Augenblick annehmen, die Geschwindigkeit v wäre so klein, daß wir gegen sie die Lichtgeschwindigkeit $c = \infty$ setzen dürfen. Dann gilt offenbar Newtonsche Kinematik; das System, in dem der Punkt ruht, ist das gewöhnliche Newtonsche mitbewegte System, Eigenbeschleunigung fällt mit gewöhnlicher Beschleunigung, daher auch der vom mitbewegten System aus gesehene Hodograph mit dem gewöhnlichen zusammen. Man erhält: Die Bewegungen vollziehen sich mit konstanter Beschleunigung und der Hamiltonsche Hodograph ist entweder eine gemeine Schraubenlinie oder ein Kreis oder eine Gerade

1) Anhang 2, wo aber der imaginäre Bogen verwendet wird.

oder ein Punkt. D. h. aber nichts anderes als: *konstante Beschleunigung wie beim Galileischen freien Fall* oder wie bei der *gleichförmigen Rotation um eine Achse*. Die Weltlinien konstanter Krümmungen sind nichts anderes als die relativistische Verallgemeinerung *des freien Falls* (event. Wurfs) oder der *gleichförmigen Rotation* (event. Schraubung) oder beider zusammen.

8. Diese Verallgemeinerung näher zu verfolgen, ist offenbar von großer Bedeutung für das Studium der beschleunigten Bewegung vom Standpunkte des Relativitätsprinzips. Hierzu denken wir uns die Weltlinien in der einfachsten Form wie sie Tab. 1 gibt. Überflüssige Translationen seien zuvor durch eine Lorentztransformation beseitigt. Wir interpretieren sie nun im Raume

$$x^{(1)} = x, \quad x^{(2)} = y, \quad x^{(3)} = z,$$

und lassen $(1/ic)x^{(4)}$ die Zeit t sein. Resultat: Tab. 2. Kol. 1. Nun wenden wir die Vorstellungen der gewöhnlichen Newtonschen Mechanik an, bestimmen die Newtonsche Bahnkurve, die Geschwindigkeit v , die Beschleunigung \dot{v} . Resultate: Tab. 2, Kol. 2, 3, 7. Weiter betrachten wir die Minkowskischen Bewegungsgleichungen in diesem S_3 . Wir haben

$$\frac{dx^{(1)}}{d\tau} = \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{dx^{(2)}}{d\tau} = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad \frac{dx^{(3)}}{d\tau} = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

ferner offenbar

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \mathfrak{R}.$$

Wir rechnen den Differentialquotienten der linken Seite

$$\frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{\dot{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v \frac{(v \dot{v})}{c^2}}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3} = \frac{\dot{v}(1-v^2/c^2) + v \left(\frac{(v \dot{v})}{c^2} \right)}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3}.$$

Wir zerlegen \dot{v} in zwei Vektoren \dot{v}_{\parallel} bzw. \dot{v}_{\perp} parallel bzw. normal zu v

$$\dot{v} = \dot{v}_{\parallel} + \dot{v}_{\perp}.$$

Dann kommt offenbar

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{v}{\sqrt{1-v^2/c^2}} &= \frac{\dot{v}_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{\dot{v}_{\parallel}(1-v^2/c^2) + \dot{v}_{\parallel}(v^2/c^2)}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3} \\ &= \frac{\dot{v}_{\perp}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{\dot{v}_{\parallel}}{(\sqrt{1-v^2/c^2})^3}. \end{aligned}$$

Dies ist nichts anderes als die wohlbekannte Tatsache, daß longitudinale und transversale Masse verschieden sind. Wir zerlegen weiter \mathfrak{R} ebenso wie \dot{v}

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_{\perp} + \mathfrak{R}_{\parallel}.$$

Dann folgt

$$\mathfrak{R}_{\perp} \sqrt{1 - v^2/c^2} = \dot{v}_{\perp} m_0,$$

$$\mathfrak{R}_{\parallel} (\sqrt{1 - v^2/c^2})^3 = \dot{v}_{\parallel} m_0.$$

Bildet man nun die Resultierende \dot{v} , so kommt

$$\frac{m_0 \dot{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \mathfrak{R} - \frac{(\mathfrak{R} v) v}{c^2}$$

oder
$$m_{\perp} \dot{v} = \mathfrak{R} - \frac{(\mathfrak{R} v) v}{c^2} \quad \left(\text{wo } m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right).$$

Diese Gleichung zeigt, daß wenn eine Kraft \mathfrak{R} am Massenpunkt m_0 angreift, die erzielte Beschleunigung nicht der Kraft parallel zeigt.¹⁾ Vielmehr erfährt der Massenpunkt noch eine Art *Widerstand in Richtung der Bewegung*, welche sich als Effekt zweiter Ordnung darstellt und der in Richtung der Bewegung fallenden Kraftkomponente proportional ist. Nur für den Fall, daß die Kraft stets parallel oder stets normal zur Bewegung angreift, sind Beschleunigung und Kraft parallel.

9. Angenommen also wir werfen einen Körper mit einer gewissen Geschwindigkeit horizontal im Schwerfeld (Tab. 2 IIIa). Anfänglich steht die Kraft normal zur Bewegungsrichtung, dann aber wenn der Körper die Galileische Parabel zu beschreiben beginnt, ist dies nicht mehr der Fall, vielmehr wirkt ihm nun eine Art Reibungswiderstand entgegen (Kol. 8). Zerlegen wir diesen in eine vertikale bzw. horizontale Komponente, so wird die vertikale Komponente, deren Betrag natürlich mit $|v|$ wächst, die Fallbeschleunigung vermindern, die horizontale aber die *Wurfgeschwindigkeit aufzehren*. Ließen wir also den Körper unendlich lange fallen, so würde er zum Schlusse die Fallgeschwindigkeit c (eine höhere gibt es ja nicht) erreicht haben, die horizontale Geschwindigkeit wäre 0. So verändert sich also der horizontale Wurf in der relativistischen Mechanik. Die Bahn ist auch demgemäß *keine Parabel* mehr, sondern eine stärker als diese gegen die Vertikale gekrümmte *Kettenlinie*.

1) Dies ist vielmehr für die erwähnte Eigenbeschleunigung der Fall.

10. Denken wir uns nun einen rotierenden Massenpunkt, der eine Kreisbahn beschreibt, so wird die Zentripetalkraft beständig zur Bewegung senkrecht stehen, der Widerstand in Richtung der Bewegung verschwindet hier, die Geschwindigkeit bleibt gleichförmig und konstant, die Kreisbewegung ist demnach unverändert auf die Relativitätsmechanik zu übertragen. (Tab. 2, IIa u. b).

11. Nun soll aber etwa zur Zeit $t = 0$ plötzlich ein konstantes Schwerfeld in Richtung der Drehachse wirken. Das rotierende System beginnt zu fallen. Im Newtonschen Sinne würde es auf dem Kreiszyylinder, der um die Drehachse geschlagen ist, sofern man diesen in die Ebene ausbreiten würde, eine Wurfparabel beschreiben. Denn in der Tat würde sich die mit dem Radius multiplizierte Winkelgeschwindigkeit als horizontale Wurfgeschwindigkeit auf dem ausgebreiteten Zylinder abbilden.¹⁾ Nach dem früheren wissen wir nun, daß die Wurfgeschwindigkeit infolge des jetzt eintretenden Widerstandes in Richtung der Bewegung allmählich aufgezehrt wird und an Stelle der Parabel eine Kettenlinie tritt. Wenn wir die Ebene wieder zum Zylinder zurückbiegen, sehen wir zunächst, daß zur Erhaltung der Zentralbewegung auf dem früheren Kreise jetzt eine beständig abnehmende Zentripetalkraft erforderlich ist, da die Rotationsgeschwindigkeit infolge des Falles abnimmt. Ferner wenn ein gleichförmig rotierendes System plötzlich in ein konstantes Schwerfeld gebracht wird, verlangsamt sich durch den Fall die Rotation, um endlich wenn die Fallgeschwindigkeit nach unendlich langer Zeit die Lichtgeschwindigkeit erreicht hat, ganz zum Stillstand zu kommen. (Tab. 2, I)."

§ 3. Dynamik der Weltlinien konstanter Krümmungen.

Das Vorstehende wird den Wunsch erwecken, die Entstehung dieser Bewegungen beim Massenpunkt und möglichst beim Körper zu untersuchen. Dies gelingt unter Zuhilfenahme einer Hypothese an folgendem elektromagnetischen Modell der Materie.

1) Abbildung durch Abwicklung auf die Ebene! Der Zylinder selbstredend aus unendlich vielen Mänteln zusammengesetzt gedacht.

1. Wir denken uns eine räumlich mit konstanter Volumendichte ρ ausgebreitete elektrische Ladung, es entspricht dies etwa der Thomsonschen Vorstellung vom positiven Atomkern. Es sei ν die materielle Massendichte der Ladung, die ebenfalls konstant angenommen werde. ρ_0, ν_0 seien die bezüglichen Ruhwerte. Angenommen die Materie oder die elektrische Ladung, die hier ihre Stelle vertritt, sei in Ruhe. Wenden wir — und dies müssen wir ja vorläufig tun — die Maxwell'schen Gleichungen auf das Innere der Materie an, so werden wir auf die wohlbekannte Schwierigkeit stoßen, die jeder elektromagnetischen Mechanik begegnet, wenn sie nicht mit Abraham die „Starrheit“ von vornherein für die Elektrizität postuliert. Nämlich die Frage: Welches sind die Kräfte, welche unsere Ladung zusammenhalten?

2. Ohne der Natur dieser Kräfte nachzugehen, machen wir über den vierdimensionalen Spannungsenergiesensor $T^{(hk)}$ der Materie die Annahme:

$$T^{(hk)} = \nu_0 \frac{dx^{(h)}}{d\tau} \frac{dx^{(k)}}{d\tau} = \nu \frac{dx^{(h)}}{dt} \frac{dx^{(k)}}{dt}.$$

Diese Annahme macht Nordström¹⁾ als einfachsten Ansatz für den materiellen Tensor im Falle der inkohärenten Massenströmung. Folgende Eigenschaften charakterisieren den Nordströmschen Tensor:

Die *Relativspannungen*

$$T^{(11)} - T^{(14)} \frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} = p_{xx} - g_x v_x,$$

$$T^{(12)} - T^{(14)} \frac{dx^{(2)}}{dx^{(4)}} = p_{xy} - g_x v_y$$

usw.

$$T^{(33)} - T^{(34)} \frac{dx^{(3)}}{dx^{(4)}} = p_{zz} - g_z v_z$$

und ebenso der *Relativenergiestrom*

$$\frac{c}{i} \left(T^{(41)} - T^{(44)} \frac{dx^{(1)}}{dx^{(4)}} \right) = \mathfrak{E}_x - v_x W \text{ usw.}$$

1) G. Nordström, Phys. Zeitschr. 11. p. 441. 1910.

verschwinden für ihn, d. h. aber, da die Relativspannungen sich als lineare homogene Funktionen der elastischen Ruhspannungen¹⁾ darstellen: *Die Ruhspannungen verschwinden.*

Nimmt man für den Fall der Ruhe die gewöhnliche Elastizitätstheorie als gültig, so heißt dies weiter: *Die Ruhdeformationen verschwinden.*

Der Nordströmsche Tensor sagt also aus, daß im bewegten Körper einzig und allein nur „scheinbare“ Deformationen von der Art der Lorentzkontraktion und die entsprechenden Spannungen auftreten, die sich im geeigneten Bezugssystem fortheben. Dann ist selbstverständlich der Energiestrom bloß *konvektiv*; wären die Ruhspannungen nicht Null, so würde allerdings durch eine geschlossene Fläche im Medium auch Energie, infolge des Umstandes, daß die Resultierende der relativen Oberflächenspannung im allgemeinen nicht normal zur Geschwindigkeit steht und daher die Arbeitsleistung der relativen Spannungen bei Bewegung nicht verschwindet, hinein- oder heraustreten.

3. In dem Resultate nun, daß die Ruhdeformationen verschwinden, die Teilchen der Ladung (vom mitbewegten System gesehen) unabänderlich an ihre Normallagen innerhalb des Körpers gebunden sind, ist offenbar eine formal relativistisch richtige Verallgemeinerung des *Newtonschen starren Körpers* zu erblicken. Sowie die Newtonsche Mechanik den starren Körper als Punktsystem betrachtet, so ist auch der Nordströmsche Ansatz eine Ausdehnung der Dynamik des Massenpunktes auf den Körper.²⁾

4. Wie es freilich — immer unter vorläufiger Aufrechterhaltung der Maxwellschen Gleichungen für das Innere der Materie — zustandekommen soll, daß die Maxwellschen Spannungen neutralisiert werden, etwa durch hinzutretende elastische Spannungen, wie es ähnlich Poincaré durch seinen bekannten hydrostatischen Kohäsionsdruck für das Lorentzelektron mit Oberflächenladung, letzthin auch Nordström³⁾

1) M. Laue, Das Relativitätsprinzip. 2. Aufl. p. 193.

2) Der Nordströmsche Tensor ist verwirklicht beim vollständigen statischen System Laues (l. c. p. 208 f.) als Mittelwert über das *Gesamt-volumen*. In unseren Betrachtungen muß aber offenbar dieser Tensor für jedes *Volumenelement* gelten.

3) G. Nordström, Ann. d. Phys. 42. p. 540. 1913.

durch Lokalisation des Kohäsionsdruckes in der Oberfläche getan haben, wobei wir aber für das völlige Verschwinden der Relativspannungen im Innern zu sorgen hätten¹⁾, dies alles soll hier nicht erörtert werden, da es sich hier bloß um ein Modell für die von uns betrachteten Bewegungen handelt.²⁾ Wir werden später sehen, daß diesem Modell die ausgezeichnete Eigenschaft zukommt, daß diese Bewegungen *ohne Ausstrahlung* vor sich gehen können (vgl. § 5, Absatz 6).

5. Dies angenommen, wollen wir untersuchen, wie sich das besagte Modell in einem *konstanten elektromagnetischen äußeren Feld* verhält. Sei $F^{(h k)}$ der Sechservektor dieses Feldes, so schreiben wir für die ponderomotorische Kraft mit Lorentz

$$K^{(h)} = \frac{q}{c} \sum_{k=1}^4 F^{(h k)} \frac{dx^{(k)}}{dt} = \frac{q_0}{c} \sum_{k=1}^4 F^{(h k)} \frac{dx^{(k)}}{d\tau} \quad h = 1, 2, 3, 4$$

und demgemäß, da die Divergenz des Nordströmschen Tensors

$$\sum_{k=1}^4 \frac{\partial}{\partial x^{(k)}} \left(v \frac{dx^{(h)}}{dt} \frac{dx^{(k)}}{dt} \right) = v \frac{d^2 x^{(h)}}{dt^2} \quad h = 1, 2, 3, 4,$$

wegen der Kontinuitätsgleichung (Erhaltung der Masse) geschrieben werden kann, folgt für die Bewegungsgleichungen der Materie:

$$v \frac{d^2 x^{(h)}}{dt^2} = \frac{q}{c} \sum_{k=1}^4 F^{(h k)} \frac{dx^{(k)}}{dt} \quad h = 1, 2, 3, 4.$$

Eine einmalige Integration liefert:

$$v \frac{dx^{(h)}}{dt} = q^{(h)} + \frac{q}{c} \sum_{k=1}^4 F^{(h k)} x^{(k)} \quad h = 1, 2, 3, 4,$$

worin die q Integrationskonstante sind.

1) Diese verschwinden natürlich nur für den stationären Zustand, der sich unter Einwirkung des konstanten äußeren Feldes (vgl. Absatz 5) einstellt; wenn dieses Feld sich plötzlich ändern sollte, müßten sie (und damit die Ruhedeformationen) wieder in Erscheinung treten.

2) Die aufzuwendende Mühe der Aufstellung solcher elastischer Spannungen, ganz abgesehen davon, daß die Maxwellschen Spannungen bekanntermaßen als elastische Spannungen im isotropen Medium undenkbar sind, würde sich kaum lohnen. Einer künftigen Abänderung der Maxwellschen Gleichungen für das Innere wird man offenbar am ehesten die Erklärung der natürlichen Kohäsion der elektrischen Ladung überlassen dürfen.

Das ist aber wegen $F^{(hk)} = -F^{(kh)}$ genau die Form der Differentialgleichungen einer infinitesimalen orthogonalen Transformation, von denen wir ausgingen (§ 1, Gleichung (1)).

6. Wir haben an unserem Modell tatsächlich die dynamische Verwirklichung der Bewegung nach Weltlinien konstanter Krümmungen. Die Integrationsresultate des § 1 sind sofort unmittelbar zu übertragen, wenn man setzt

$$\varepsilon^{(h)} du = \frac{1}{v} q^{(h)} dt, \quad \varepsilon_k^{(h)} du = \frac{q}{vc} F^{(hk)} dt;$$

dementsprechend gibt eine Klassifikation an der Hand der Elementarteiler die einfachsten Typen der Bewegungen als verursacht durch *einfachste Typen* des *konstanten* elektromagnetischen Feldes. Die Fälle des § 1 sind insbesondere

- I [1111] $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_x, |\mathfrak{E}| = \mathfrak{E}_x$, elektrisches und magnetisches Feld parallel
 II [11(11)] $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_x, |\mathfrak{E}| = 0$, magnetisches Feld allein
 III [(11)11] $|\mathfrak{H}| = 0, |\mathfrak{E}| = \mathfrak{E}_x$, elektrisches Feld allein
 IV [(31)] $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_y = |\mathfrak{E}| = \mathfrak{E}_x$, elektrisches und magnetisches Feld senkrecht und von gleichem Betrag

V [(1111)] $|\mathfrak{H}| = |\mathfrak{E}| = 0$, kein Feld;
 die Fälle $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_y > |\mathfrak{E}| = \mathfrak{E}_x$, bzw. $|\mathfrak{H}| = \mathfrak{H}_y < |\mathfrak{E}| = \mathfrak{E}_x$ können offenbar aus dem Fall II bzw. III durch eine Lorentztransformation berechnet werden, wenn man dort zuvor die z -Richtung mit der y - bzw. x -Richtung vertauscht. (Invarianz von $\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{E}^2$ bzw. $\mathfrak{E} \mathfrak{H}$!)

Diese Resultate sind in Tab. 2, Kol. 12 zusammengestellt.

7. Man wird sich vielleicht fragen, ob die gefundenen Resultate Anwendung finden könnten auf die Ablenkungsversuche der Kathodenstrahlen, da ja die Verhältnisse des äußeren Feldes daran erinnern. Vor diesbezüglicher Anwendung ist zu warnen, da ja *hier* die Bewegung von aller Ewigkeit her im Felde stattfindet, was *dort* gewiß nur für ein kleines Stück der Fall ist. Qualitativ läßt sich allerdings sagen, daß das Wesentliche einer solchen Anwendung wäre, daß die Galileische Parabel durch die Kettenlinie ersetzt werden müßte, was sich freilich praktisch auch nicht einmal bemerkbar machen müßte.

Von anderem nicht relativistischen Gesichtspunkte aus

sind die Bewegungen des Lorentzelektrons als eines elektrischen Massenpunktes im konstanten elektromagnetischen Feld von Schott¹⁾ betrachtet worden, der dieselben Resultate findet.

§ 4. Die Weltlinienschar konstanter Krümmungen
in der Darstellung durch das begleitende Vierkant einer Linie.

Werfen wir einen Rückblick auf das Vorstehende, so waren die Weltlinien konstanter Krümmungen im § 1 auf die orthogonale Transformation des S_4 als zugehörige Schar von Bahnkurven gegründet, im § 2 im Hinblick auf ihre kinematisch ausgezeichnete Rolle vierdimensional und dreidimensional besprochen, im § 3 endlich aus einem hypothetischen elektromagnetischen Modell dynamisch abgeleitet worden.

1. Wir gehen nun daran, die physikalisch ausgezeichnete Rolle dieser beschleunigten Bewegungen mit Rücksicht auf die Verallgemeinerung der Lorentztransformation zu untersuchen. Da der Übergang von einem Kurvenpunkt zum nächsten vermittelt einer orthogonalen Transformation geschieht, für die die Grundgleichungen *kovariant* bleiben, vermuten wir, daß es ein ausgezeichnetes „mitbewegtes“ System geben muß, in welchem sie *invariant* bleiben. Ein solches System gibt es tatsächlich, es ist das *begleitende Vierkant* der Weltlinie.

2. In der Differentialgeometrie wird dieses wie folgt definiert:

Eine Achse ist die jeweilige *Tangente*;

$$c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)} c_1^{(4)}$$

(als Einheitsvektor c_1 geschrieben) seien ihre Richtungskosinusse.

In der *Schmiegungsebene* steht auf der Tangente senkrecht die *Hauptnormale*; die Richtungskosinusse seien bezeichnet:

$$c_2^{(1)} c_2^{(2)} c_2^{(3)} c_2^{(4)} \text{ (Einheitsvektor: } c_2\text{)}.$$

Im *Schmiegungsraum* steht auf der Schmiegungsebene senkrecht die *Binormale*; die Richtungskosinusse seien bezeichnet:

$$c_3^{(1)} c_3^{(2)} c_3^{(3)} c_3^{(4)} \text{ (Einheitsvektor: } c_3\text{)}.$$

Auf dem *Schmiegungsraum* endlich steht senkrecht die *Trinormale*

$$c_4^{(1)} c_4^{(2)} c_4^{(3)} c_4^{(4)} \text{ (Einheitsvektor: } c_4\text{)}.$$

1) G. A. Schott, Electromagnetic radiation. p. 63 f. u. Appendix G. p. 295 f. Cambridge 1912.

Das Achsengerüst

$$[c_1 c_2 c_3 c_4]$$

heißt das *begleitende Vierkant*. Es verändert seine Stellung längs der Kurve von Ort zu Ort. Vergleicht man die Lage eines Vierkants in einem bestimmten Kurvenpunkt mit der im nächsten, so findet man, daß die konsekutive Lage aus der vorhergehenden durch eine *infinitesimale orthogonale Transformation* hervorgeht (Frenetsche Formeln).¹⁾

3. Welcher Natur ist nun diese infinitesimale orthogonale Transformation bei unseren Kurven *konstanter Krümmungen*? Antwort: Sie ist nichts anderes als die *infinitesimale Transformation selbst*, die die Kurven zu Bahnkurven hat.

Dies zu beweisen, denken wir uns irgendeinen Radiusvektor, der im *begleitenden Vierkant* fest bleibt. Sei x ein beliebiger Punkt einer beliebigen Kurve der Schar, sei $c_1 c_2 c_3 c_4$ sein Vierkant in der Lage, die durch Angabe des Parameters u gekennzeichnet wird, dann ist, wenn

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X^{(h)} = x^{(h)} + \Gamma^{(1)} c_1^{(h)} + \Gamma^{(2)} c_2^{(h)} + \Gamma^{(3)} c_3^{(h)} + \Gamma^{(4)} c_4^{(h)} \\ h = 1, 2, 3, 4 \end{array} \right.$$

definiert wird,

$$X - x$$

ein solcher Radiusvektor, sofern die Γ von u frei, also für den Punkt X während der ganzen „Mitbewegung“ konstant bleiben. Lassen wir nun den Punkt x seiner vorgezeichneten Bahnkurve entlang laufen, so „bewegt“ sich das Vierkant „mit“ und auch der in ihm feste Radiusvektor, der von x nach X weist. X beschreibt so eine Kurve konstanter Krümmungen²⁾ und diese muß nun offenbar mit einer Bahnkurve der Schar sich identisch erweisen, wenn beide Transformationen identisch sein sollen. Hierzu genügt offenbar der Nachweis der Äquidistanz. Zur Kurve x kann es ja nur eine einzige Kurve konstanter Krümmungen durch die Anfangslage von X geben, die beständig mit ihr äquidistant bleibt, eben die zur Transformation gehörige Bahnkurve, die durch jene Anfangslage von X geht. Bildet man aber

1) Anhang 1.

2) Wie man mit Hilfe der Frenetschen Formeln zeigt.

$$(X^{(1)} - x^{(1)})^2 + (X^{(2)} - x^{(2)})^2 + (X^{(3)} - x^{(3)})^2 + (X^{(4)} - x^{(4)})^2 \\ = (\Gamma^{(1)})^2 + (\Gamma^{(2)})^2 + (\Gamma^{(3)})^2 + (\Gamma^{(4)})^2,$$

so findet man tatsächlich Äquidistanz.

4. Wir haben aber zugleich eine ausgezeichnete Darstellung der gesamten zur Transformation gehörigen Schar gefunden, wie sie sich im begleitenden Vierkant einer Kurve der Schar darstellt:

$$X(u) = x(u) + \Gamma^{(1)} c_1(u) + \Gamma^{(2)} c_2(u) + \Gamma^{(3)} c_3(u) + \Gamma^{(4)} c_4(u)$$

mit konstanten Γ stellt die gesamte Schar von Bahnkurven einer orthogonalen Transformation dar, der die Kurve $x(u)$ angehört.

5. Durch die gemeinsamen Parameterwerte u sind hierbei jeweils ∞^3 Punkte des S_4 verbunden; diese Zuordnung (§ 1), einmal willkürlich gewählt, wird durch die Transformation nicht zerstört. Zusammengehörige Punkte bleiben jeweils durch gleiches u gekennzeichnet.

Nach den Erörterungen des § 1 läßt sich aber eine beliebige andere Zuordnung geben. Insbesondere heben wir die Zuordnung hervor

$$X(u) = x(u) + \Delta^{(2)} c_2(u) + \Delta^{(3)} c_3(u) + \Delta^{(4)} c_4(u)$$

mit selbstredend ebenfalls konstanten Δ , wo alle zu x gehörigen Punkte im Normalraum $[c_2, c_3, c_4]$ liegen. (Es ist dies nichts anderes als der Bornsche starre Körper zweiter Art (§ 5).) Nach den Erörterungen des § 1 ist dies *wieder ganz dieselbe Kurvenschar wie oben*, da ja eine Weltlinie konstanter Krümmung überall dieselbe „innere Gestalt“ hat.

6. Umgekehrt wird man sich fragen, ob tatsächlich alle in § 1 aufgestellten Kurvenscharen diese Darstellung zulassen. Als Beispiel wählen wir (IIb), Tab. 1

$$x^{(1)} = a \cos \lambda(u - u_0), \quad x^{(2)} = a \sin \lambda(u - u_0), \quad x^{(3)} = x_0^{(3)}, \quad x^{(4)} = iu.$$

Man entnimmt den Kol. 13—16 die Richtungskosinusse des Vierkants:

$$c_1^{(1)} = -\frac{a \lambda \sin \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}, \quad c_1^{(2)} = \frac{a \lambda \cos \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}, \quad c_1^{(3)} = 0, \\ c_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}, \\ c_2^{(1)} = + \cos \lambda(u - u_0), \quad c_2^{(2)} = + \sin \lambda(u - u_0), \quad c_2^{(3)} = 0, \\ c_2^{(4)} = 0,$$

$$\begin{aligned}
 c_3^{(1)} &= -\frac{\sin \lambda (u - u_0)}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}, & c_3^{(2)} &= \frac{\cos \lambda (u - u_0)}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}, & c_3^{(3)} &= 0, \\
 c_3^{(4)} &= \frac{i a \lambda}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}, \\
 c_4^{(1)} &= 0, & c_4^{(2)} &= 0, & c_4^{(3)} &= 1, \\
 c_4^{(4)} &= 0.
 \end{aligned}$$

Man bestimme nun, wenn $I^{(1)}, I^{(2)}, I^{(3)}, I^{(4)}$ vier völlig willkürliche Konstanten bedeuten¹⁾, durch

$$\begin{aligned}
 -\frac{a \lambda I^{(1)}}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}} - \frac{I^{(3)}}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}} &= A \sin \lambda (-U + u + U_0 - u_0), \\
 a + I^{(2)} &= A \cos \lambda (-U + u + U_0 - u_0), \\
 \frac{I^{(1)}}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}} + \frac{i I^{(3)} a \lambda}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}} &= i(U - u), \\
 x_0^{(3)} + I^{(4)} &= X_0^{(3)},
 \end{aligned}$$

die vier Konstanten $A, X_0^{(3)}, U_0, U - u$ und erhält

$$\begin{aligned}
 X^{(1)} &= A \cos \lambda (U - U_0), & X^{(2)} &= A \sin \lambda (U - U_0), & X^{(3)} &= X_0^{(3)}, \\
 X^{(4)} &= iU,
 \end{aligned}$$

einen neuen Punkt, der offenbar, wenn u variiert, die Bahnkurve

$$X(A, X_0^{(3)}, U_0, U)$$

der Schar (IIb) beschreibt. Die I bleiben dabei konstant, da ja $U - u$ (in den obigen Gleichungen) als Konstante zu behandeln ist (§ 1).

§ 5. Das begleitende Vierkant als „mitbewegtes“ System im Sinne Lorents.

Wir fassen nun eine bestimmte Weltlinie $x(u)$ ins Auge und lassen einen Beobachter sich ihr entlang bewegen, z. B. (IIb) (Tab. 1): er möge mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die z -Achse rotieren. Als ausgezeichnetes Bezugssystem ordnen wir ihm jeweils das begleitende Vierkant in der augenblicklichen Lage $x(u)$ zu.

1. Was bedeutet dies physikalisch? Zunächst wird sich selbstverständlich der Beobachter in Ruhe wähnen müssen,

1) $I^{(1)}$ muß natürlich rein imaginär, $I^{(2)} I^{(3)} I^{(4)}$ reell sein.

solange er nur auf sich selbst achtet. Es ist also ein mitbewegtes System, in dem offenbar die Eigenzeit τ (oder der imaginäre Bogen $ic\tau$ der Weltlinie $x(u)$) für die Zeitbestimmung maßgebend ist. Nun kann ein solcher Beobachter nicht auf einem materiellen Punkt sitzen, er muß vielmehr einen ganzen Bezugskörper bewohnen. Was ist dies für ein Körper? Es ist dies ein an der Bewegung des Beobachters (in gewissem Sinne) teilhabender Körper, eben der Bornsche starre Körper zweiter Art. In der Tat ist der Bezugskörper durch ein in ihm festes Achsengerüst eindeutig anzugeben. Und nach unserer Voraussetzung war das Achsensystem des Beobachters das begleitende Vierkant, die drei raumartigen Achsen also c_2, c_3, c_4 ; diese sind aber feste Richtungen im Bornschen starren Körper zweiter Art¹⁾, da dessen Weltlinien (nach § 4) durch

$$(4) \quad X = x + \Delta^{(2)} c_2 + \Delta^{(3)} c_3 + \Delta^{(4)} c_4 \quad (\text{die } \Delta = \text{const})$$

angegeben sind, also insbesondere auch $\Delta^{(2)} = 1, \Delta^{(3)} = \Delta^{(4)} = 0$ oder $\Delta^{(3)} = 1, \Delta^{(2)} = \Delta^{(4)} = 0$ oder $\Delta^{(4)} = 1, \Delta^{(2)} = \Delta^{(3)} = 0$ feste Richtungen in ihm darstellen.

2. Die Punkte

$$X = x + \Delta^{(2)} c_2 + \Delta^{(3)} c_3 + \Delta^{(4)} c_4$$

sind offenbar, von x aus gesehen, „gleichzeitig“ mit dem Beobachter in x ; er mißt ihnen die räumlichen „Koordinaten“ $\Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \Delta^{(4)}$ zu, wo der Index 4 diesmal *nicht* die zeitartige Koordinate charakterisiert. Bewegt sich nun der Beobachter, so bewegt sich der Bezugskörper mit, dabei bleiben $\Delta^{(2)} \Delta^{(3)} \Delta^{(4)}$ nach Definition konstant: *Vom Eigensystem des Beobachters aus gesehen, ruht der Bezugskörper beständig.*²⁾

3. Was ist es nun mit den nicht „gleichzeitigen“ Positionen des Bezugskörpers? Angenommen der Beobachter könnte diese betrachten — und tatsächlich wird er, wenn er seine Beobachtungen mit Hilfe des Lichtes macht, streng ge-

1) G. Herglotz, Ann. d. Phys. 31. insbesondere p. 402f. 1910; F. Kottler, l. c. § 8.

2) Selbstredend: In einem gewöhnlichen Lorentzschcn Eigensystem, das nur einmal mit einem solchen Vierkant zusammenfallen kann, ruht der Bornsche Körper zweiter Art (anders als der Bornsche Körper erster Art) *nicht*! Seine Weltlinien sind *keine* Parabelkurven wie beim Körper erster Art (vom Typ IIIb abgesehen).

nommen wegen der Latenzzeit nur nichtgleichzeitige Vorgänge sehen können — so ist, wenn er auch hier Ruhe beobachten soll, ebenfalls Konstanz der Eigenkoordinaten zu verlangen. Diese ist, wie Ansatz (3) für nicht gleichzeitige Punkte des Bezugskörpers:

$$X = x + I^{(1)}c_1 + I^{(2)}c_2 + I^{(3)}c_3 + I^{(4)}c_4$$

zeigt, tatsächlich erfüllt. Dabei müssen wir natürlich dem Beobachter selbst eine Zeitkoordinate, offenbar:

$$ic\tau$$

zubilligen, so daß wir für

$$I^{(1)} = ic(T' - \tau)$$

zu setzen haben, wo T' die vom Beobachter nach Eigenzeit geschätzte Zeit des beobachteten Punktes ist. Für „gleichzeitige“ Punkte ist offenbar

$$T' = \tau,$$

so daß der Ansatz (4) zu Recht besteht.

4. Das eingeführte Bezugssystem ist also tatsächlich ein *mitbewegtes*. Worin ruhen nun die ausgezeichneten Eigenschaften dieses Systems gerade bei den Weltlinien konstanter Krümmungen? Denn man könnte ja bei einer beliebigen Bewegung $x(u)$ das begleitende Vierkant als Eigensystem einführen und einen Bezugskörper nach Art von (4) definieren. Aber eine solche Darstellung wäre zunächst nicht *reziprok*, d. h. würde man von X aus x betrachten und das begleitende Vierkant von X zugrundelegen, so würde

$x(u) = X(u) + \delta^{(1)}(u)C_1(u) + \delta^{(2)}(u)C_2(u) + \delta^{(3)}(u)C_3(u) + \delta^{(4)}(u)C_4(u)$ kommen, die δ wären nicht mehr konstant, x wäre ausgezeichnet auf unserem Bezugskörper. *Nur bei Weltlinien konstanter Krümmungen finden sich auch die δ konstant.* Diese Gleichartigkeit aller Punkte des Bezugskörpers wird man aber naturgemäß für eine Erweiterung der Lorentztransformation verlangen müssen, da ja der Beobachter nicht an einen bestimmten Ort auf dem Körper gebunden zu sein braucht.¹⁾

5. Zweitens aber — und das ist das wesentliche — die infinitesimale orthogonale Transformation wäre von Lage zu Lage des Beobachters nicht mehr konstant. Nur bei Weltlinien konstanter Krümmungen ist dies, wie wir wissen, der Fall.

1) Über Eigensysteme überhaupt vgl. Anhang 3.

Die physikalische Wichtigkeit dieses Umstandes bei unseren Weltlinien erhellt aus dem folgenden: Angenommen zwischen den Punkten unseres Körpers wirken elektromagnetische Kräfte. Wie verändern sie sich durch die Bewegung? Antwort: *Gar nicht*. Denn bezogen auf ein begleitendes Vierkant im Körper stellen sie sich durch die oben eingeführten Eigenkoordinaten Γ der Lagen der Punkte des Körpers dar; diese bleiben aber konstant, sofern die Punkte des Körpers an der Bewegung unverändert teilnehmen; daher bleiben auch die elektromagnetischen Kräfte zwischen den Punkten konstant. Dazu ist allerdings notwendig, daß diese Kräfte im Gleichgewicht waren; sonst würde ja die Bewegung zerstört, die Γ könnten nicht mehr konstant sein. Dazu wieder sind im allgemeinen Kräfte anderer Natur erforderlich als rein elektromagnetische. Aber zufolge der allgemein geltenden Anschauung müssen sich diese genau so transformieren wie elektromagnetische. Das gefundene sprechen wir aus wie folgt:

Wenn auf unserem Bezugskörper irgend einmal Kräftegleichgewicht geherrscht hat, so bleibt dieses während der ganzen Dauer der Bewegung erhalten.

6. Insbesondere folgt hieraus für unser hypothetisches elektromagnetisches Modell (§ 3), daß die Bewegung ohne Ausstrahlung vor sich gehen wird, da die gegenseitigen Einwirkungen der Teilchen der Ladung *einmal*, daher *immer* Null sind. Bekanntlich ist es eine offene Frage der Theorie der Magnetisierungselektronen, wieso bei ihnen durch Jahrhunderte keine Hemmung durch Ausstrahlung zu bemerken sei. Die gleichförmige Rotation, die ihnen zugeschrieben wird, gehört aber nach der obigen Hypothese zu den ausgezeichneten strahlungsfreien beschleunigten Bewegungen!¹⁾

7. Zum Schlusse soll noch, obwohl nach dem Gesagten eigentlich überflüssig, ein ausführlicher Beweis für die Konstanz des elektromagnetischen Feldes im begleitenden Vierkant vorgetragen werden. Wir stützen uns auf die Tatsache, daß jedes Feld in die Elementarfelder punktförmiger Ladungen zerlegt gedacht werden kann. Das Elementarfeld aber, das

1) Vgl. hierzu die „stationären Zustände“ der Elektronen des Atommodells von N. Bohr, Phil. Mag. 26. insbes p. 4. 1913.

etwa von x in X erzeugt wird, können wir mit Hilfe der Schwarzschildschen Formeln rechnen. Hierzu denken wir uns

$X = x + \Gamma^{(1)} c_1 + \Gamma^{(2)} c_2 + \Gamma^{(3)} c_3 + \Gamma^{(4)} c_4$
 gegeben; die Punkte sind also selbstverständlich nicht mehr gleichzeitig, da sie ja aufeinander wirken müssen. Es sei also

$$(X^{(1)} - x^{(1)})^2 + (X^{(2)} - x^{(2)})^2 + (X^{(3)} - x^{(3)})^2 + (X^{(4)} - x^{(4)})^2 \\ = (\Gamma^{(1)})^2 + (\Gamma^{(2)})^2 + (\Gamma^{(3)})^2 + (\Gamma^{(4)})^2 = 0.$$

Wollte man die Lage \bar{X} aufsuchen, die X „gleichzeitig“ mit x hatte, so würde man finden

$$\bar{X} = x + \Delta^{(2)} c_2 + \Delta^{(3)} c_3 + \Delta^{(4)} c_4,$$

wo die $\Delta^{(2)}, \Delta^{(3)}, \Delta^{(4)}$ von den $\Gamma^{(2)}, \Gamma^{(3)}, \Gamma^{(4)}$ verschieden wären. Ein solches Verhalten sind wir von den gewöhnlichen Lorentz-schen Bezugssystemen nicht gewohnt, da ja hier die drei Raumkoordinaten eines ruhenden Punktes in jeder seiner Positionen (der gleichzeitigen wie der effektiven) dieselben bleiben, nur die Zeitkoordinate sich verändert. Wir dürfen aber eben nicht völlige Analogie mit den Lorentzsystemen erwarten; dem Beobachter in x bleibt dies selbstverständlich verborgen, da er ja nur die effektive¹⁾ Lage \bar{X} in Wirklichkeit sehen kann und diese natürlich gleiche Raumkoordinaten $\bar{\Gamma}^{(2)}, \bar{\Gamma}^{(3)}, \bar{\Gamma}^{(4)}$ und gleiche Zeitkoordinatendifferenz $\bar{\Gamma}^{(1)}$ beibehält.

Dann lauten die Schwarzschildschen Formeln²⁾:

$$F^{(hk)} = de \frac{1}{(RV)^2} \left[R \frac{dV}{d\tau} \right]^{(hk)} + de \frac{c^2 - R \frac{dV}{d\tau}}{(RV)^3} [RV]^{(hk)},$$

dabei bedeuten

de die Ladung in x ,

$R = -X + x$ den Radiusvektor vom Aufpunkt zum Lichtpunkt,

$$V = \frac{dx}{d\tau} \quad \text{und} \quad \frac{dV}{d\tau} = \frac{d^2 x}{d\tau^2},$$

$(RV), \left(R \frac{dV}{d\tau} \right)$ sind skalare Produkte,

$$[RV]^{(hk)} = R^{(h)} V^{(k)} - R^{(k)} V^{(h)} \dots,$$

$$\left[R \frac{dV}{d\tau} \right]^{(hk)} = R^{(h)} \frac{dV^{(k)}}{d\tau} - R^{(k)} \frac{dV^{(h)}}{d\tau}.$$

1) D. h. die ihm das Feld zusendende Lage.

2) F. Kottler, l. c. § 4. Nur war dort $V = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{1}{ic} = \frac{dx}{ds}$ gesetzt.

Nun gilt für den Bogen $s = i c \tau^1$

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{ic} \frac{dx}{d\tau} = c_1, \quad \frac{d^2 x}{ds^2} = -\frac{1}{c^3} \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{c_2}{R_1},$$

wo R_1 der Radius der ersten Krümmung (bezogen auf den imaginären Bogen s) ist. Daher kommt wegen

$$R = -I^{(1)} c_1 - I^{(2)} c_2 - I^{(3)} c_3 - I^{(4)} c_4$$

für das Feld

$$F^{(hk)} = -de \frac{1}{(I^{(1)})^2} \left\{ \frac{I^{(1)}}{R_1} [c_1 c_2]^{(hk)} + \frac{I^{(3)}}{R_1} [c_1 c_3]^{(hk)} + \frac{I^{(4)}}{R_1} [c_1 c_4]^{(hk)} \right\} \\ - de \frac{1 - \frac{I^{(2)}}{R_1}}{(I^{(1)})^3} \left\{ I^{(2)} [c_2 c_1]^{(hk)} + I^{(3)} [c_3 c_1]^{(hk)} + I^{(4)} [c_4 c_1]^{(hk)} \right\}$$

also im Bezugssystem

$$c_1 c_2 c_3 c_4$$

tatsächlich konstant.

Berechnet man mit Hilfe der Frenetschen Formeln die Achsen

$$C_1 C_2 C_3 C_4$$

des Bezugssystems in X , so findet man, daß sie sich, wie vor auszusehen, linear mit konstanten Koeffizienten durch die $c_1 c_2 c_3 c_4$ ausdrücken. Also ist das Feld, das von x und ebenso von jedem anderen Punkte des Körpers herrührt, auch im Eigensystem von X konstant, womit der Beweis erbracht ist.

§ 6. Bewegungen relativ zum Bezugskörper. Verallgemeinerung des Einsteinschen Additionsgesetzes der Geschwindigkeiten.

1. Das System

$$c_1 c_2 c_3 c_4$$

stellt also nach dem Vorhergehenden die Verallgemeinerung des Lorentzschen mitbewegten Systems auf unsere beschleunigten Bewegungen dar; die verallgemeinerte Lorentztransformation ergibt sich, wenn wir in

1) Anhang 1.

$$X = x + \Gamma^{(1)} c_1 + \Gamma^{(2)} c_2 + \Gamma^{(3)} c_3 + \Gamma^{(4)} c_4$$

z. B. einführen¹⁾

$$\Gamma^{(3)} = X' \quad \Gamma^{(4)} = Y' \quad \Gamma^{(2)} = Z' \quad \Gamma^{(1)} = i c (T' - \tau)$$

in der Form

$$X - x = i c (T' - \tau) c_1 + Z' c_2 + X' c_3 + Y' c_4.$$

In den „Koordinaten“ $X' Y' Z' T'$ stellen sich offenbar die Gleichgewichtserscheinungen auf dem bewegten Bezugskörper durch konstante Größen dar; dem mitbewegten Beobachter erscheint seine Umgebung, sofern sie an der Bewegung teilnimmt, in diesem Koordinatensystem in Ruhe. Nur insoweit gibt es von diesem Standpunkte eine *Relativität der Beschleunigung*; für Vorgänge, die nicht „starr“ an die vorgezeichnete Bewegung gebunden sind, gibt es hingegen hier ebensowenig eine Relativität der Beschleunigung wie in der klassischen Mechanik, wo bekanntlich in einem solchen Falle „scheinbare“ Beschleunigungen (Coriolis, Foucaultsches Pendel usw.) auftreten.

Dies näher zu beleuchten, wollen wir zwei von unseren fünf Typen beschleunigter Bewegungen näher behandeln, den Grenzfall der *gleichförmigen Translation* (V) und den Fall der *gleichförmigen Rotation* (II b); am ersteren werden wir sehen, wie sich Altbekanntes in die hier gegebene Darstellung einordnet, am letzteren, wie die hier vorgetragene verallgemeinerte Lorentztransformation mit naheliegenden Vorstellungen und mit dem Experiment (Sagnaceffekt) übereinstimmt.

2. *Geradlinige gleichförmige Translation* (Tab. 1, V). Die Tangente stimmt mit der geraden Weltlinie beständig überein. Die drei Normalen sind natürlich willkürlich, wir wählen als „Hauptnormale“ (was hier natürlich eine willkürliche Bezeichnungsweise ist) die Normale in der Ebene Tangente-Zeitachse. (Dies hat zur Folge, daß die Translationsrichtung z im gestrichenen System ebenfalls durch die z' -Achse dargestellt wird.) Es kommt etwa:

$$\begin{aligned} c_3^{(1)} &= 1, & c_3^{(2)} &= 0, & c_3^{(3)} &= 0, & c_3^{(4)} &= 0, \\ c_4^{(1)} &= 0, & c_4^{(2)} &= 1, & c_4^{(3)} &= 0, & c_4^{(4)} &= 0, \end{aligned}$$

1) Hierbei ist entweder $\Gamma^{(1)} = 0$ („gleichzeitige“), oder

$\Gamma^{(1)} = -i \sqrt{(\Gamma^{(2)})^2 + (\Gamma^{(3)})^2 + (\Gamma^{(4)})^2}$ („effektive“ Position).

$$c_2^{(1)} = 0, \quad c_2^{(2)} = 0, \quad c_2^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad c_2^{(4)} = \frac{-v_z}{ic\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$c_1^{(1)} = 0, \quad c_1^{(2)} = 0, \quad c_1^{(3)} = \frac{v_z}{ic\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad c_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Daher wenn

$$\Gamma^{(3)} = X', \quad \Gamma^{(4)} = Y', \quad \Gamma^{(2)} = Z', \quad \Gamma^{(1)} = ic(T' - \tau)$$

genommen werden.

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} X - x = \Gamma^{(1)}c_1^{(1)} + \Gamma^{(2)}c_2^{(1)} + \Gamma^{(3)}c_3^{(1)} + \Gamma^{(4)}c_4^{(1)} = \Gamma^{(3)} = X', \\ Y - y = \Gamma^{(1)}c_1^{(2)} + \Gamma^{(2)}c_2^{(2)} + \Gamma^{(3)}c_3^{(2)} + \Gamma^{(4)}c_4^{(2)} = \Gamma^{(4)} = Y', \\ Z - z = \Gamma^{(1)}c_1^{(3)} + \Gamma^{(2)}c_2^{(3)} + \Gamma^{(3)}c_3^{(3)} + \Gamma^{(4)}c_4^{(3)} = \Gamma^{(2)}c_2^{(3)} \\ \quad + \Gamma^{(1)}c_1^{(3)} = Z' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + (T' - \tau) \frac{v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ ic(T - t) = \Gamma^{(1)}c_1^{(4)} + \Gamma^{(2)}c_2^{(4)} + \Gamma^{(3)}c_3^{(4)} + \Gamma^{(4)}c_4^{(4)} = \Gamma^{(2)}c_2^{(4)} \\ \quad + \Gamma^{(1)}c_1^{(4)} = Z' \frac{-v_z}{ic\sqrt{1 - v^2/c^2}} + ic(T' - \tau) \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{array} \right.$$

Berücksichtigt man (Tab. 2)

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0 + v_z t, \quad t = \frac{\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

so erhält man, wenn man noch, was ja frei steht, $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ setzt, die gewohnte Form der Lorentzschen Formeln

$$X = X', \quad Y = Y', \quad Z = \frac{Z' + v_z T'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad T = \frac{T' + v_z/c^2 Z'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Das System

$$X' Y' Z' T'$$

ist also in diesem Falle tatsächlich identisch mit dem mitbewegten System von Lorentz.

Durch Differentiation von (5) erhalten wir das Einsteinsche Additionsgesetz

$$\begin{aligned} dX - dx &= dX', \\ dY - dy &= dY', \\ dZ - dz &= \frac{dZ' + (dT' - d\tau)v_z}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ dT - dt &= \frac{+v_z/c^2 dZ' + (dT' - d\tau)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Selbstverständlich ist hierbei

$$dT = dt$$

(nicht aber auch $dT' = d\tau'$!), da T und t universale Zeiten sind.
Also weiter wie vorhin

$$dX = dX', \quad dY = dY', \quad dZ = \frac{dZ' + v_z dT'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$dt = dT = \frac{+v_z/c^2 dZ' + dT'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

woraus die bekannten Formeln

$$\frac{dX}{dT} = \frac{\frac{dX'}{dT'} \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v_z/c^2 \frac{dZ'}{dT'}}, \quad \frac{dY}{dT} = \dots, \quad \frac{dZ}{dT} = \frac{\frac{dZ'}{dT'} + v_z}{1 + v_z/c^2 \frac{dZ'}{dT'}}.$$

3. Gleichförmige Rotation (Tab. 1, IIb). Es sei also die Weltlinie des Beobachters

$$x^{(1)} = a \cos \omega t, \quad x^{(2)} = a \sin \omega t, \quad x^{(3)} = x_0^{(3)}, \quad x^{(4)} = ict.$$

Tab. 1, Kol. 13—16, gibt für das verallgemeinerte Eigensystem

$$c_1^{(1)} = -\frac{a \omega \sin \omega t}{ic \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}, \quad c_1^{(2)} = \frac{a \omega \cos \omega t}{ic \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}, \quad c_1^{(3)} = 0,$$

$$c_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}},$$

$$c_2^{(1)} = +\cos \omega t, \quad c_2^{(2)} = +\sin \omega t, \quad c_2^{(3)} = 0, \quad c_2^{(4)} = 0,$$

$$c_3^{(1)} = -\frac{\sin \omega t}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}, \quad c_3^{(2)} = \frac{\cos \omega t}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}, \quad c_3^{(3)} = 0,$$

$$c_3^{(4)} = \frac{ia\omega}{c \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}},$$

$$c_4^{(1)} = 0, \quad c_4^{(2)} = 0, \quad c_4^{(3)} = 1, \quad c_4^{(4)} = 0.$$

Zwecks Feststellung der Natur dieses Bezugssystems¹⁾ führen wir in der Lage $x(t)$ des Beobachters auf seiner Kreis- peripherie folgendes Bezugssystem ein: Eine Achse weise vom Zentrum der Kreisbahn weg (R -Achse), eine zweite entlang der

1) Dies geschieht kürzer durch Einzeichnung des Dreikants $c_1 c_2 c_3$ an der Weltlinie (Schraubenlinie).

Bahntangente (Θ -Achse), die dritte parallel der Rotationsachse Z_1 -Achse), als Zeitachse fungiere wieder die $X^{(4)} = ic T$ -Achse. Der Ursprung sei die Lage des Beobachters selbst (B , Fig. 1).

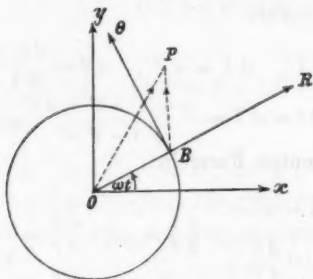


Fig. 1.

Aus der Figur entnimmt man, daß für einen beliebigen Punkt P mit den Koordinaten $XYZT$ gilt:

$$R = +X \cos \omega t + Y \sin \omega t - a,$$

$$\Theta = -X \sin \omega t + Y \cos \omega t,$$

$$Z = z_0 + Z_1,$$

$$T = T.$$

Der Beobachter B hat die augenblickliche Geschwindigkeit $a \omega$

in Richtung der Θ -Achse. Es liegt nahe, diese durch eine Lorentztransformation zum Verschwinden zu bringen, also statt des Systems $R \Theta Z T$ ein System $R' \Theta' Z' T'$ einzuführen:

$$(6) \quad \begin{cases} R' = R, \\ \Theta' = \frac{\Theta - a \omega (T - t)}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}, \\ Z' = Z_1, \\ T' - \tau = \frac{-a \omega / c^2 \Theta + (T - t)}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}. \end{cases}$$

Dies ist tatsächlich dasselbe, das auch das begleitende Vierkant liefert. Denn wenn $I^{(1)} = ic(T' - \tau)$, $I^{(2)} = R'$, $I^{(3)} = \Theta'$, $I^{(4)} = Z'$ geschrieben werden, kommt

$$\begin{aligned}
 (6a) \left\{ \begin{aligned}
 X &= x + I^{(1)}c_1^{(1)} + I^{(2)}c_2^{(1)} + I^{(3)}c_3^{(1)} + I^{(4)}c_4^{(1)} \\
 &= a \cos \omega t - \frac{a \omega (T' - \tau) + \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \sin \omega t + R' \cos \omega t, \\
 Y &= y + I^{(1)}c_1^{(2)} + I^{(2)}c_2^{(2)} + I^{(3)}c_3^{(2)} + I^{(4)}c_4^{(2)} \\
 &= a \sin \omega t + \frac{a \omega (T' - \tau) + \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \cos \omega t + R' \sin \omega t, \\
 Z &= z + I^{(1)}c_1^{(3)} + I^{(2)}c_2^{(3)} + I^{(3)}c_3^{(3)} + I^{(4)}c_4^{(3)} \\
 &= z_0 + Z', \\
 icT &= ict + I^{(1)}c_1^{(4)} + I^{(2)}c_2^{(4)} + I^{(3)}c_3^{(4)} + I^{(4)}c_4^{(4)} \\
 &= ict + \frac{(T' - \tau) + a \omega / c^2 \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Bildet man hieraus, wie oben angegeben, R bzw. Θ , so kommt

$$\begin{aligned}
 R &= R', \quad \Theta = \frac{a \omega (T' - \tau) + \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}, \quad Z - z_0 = Z_1 = Z', \\
 T - t &= \frac{T' - \tau + a \omega / c^2 \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}},
 \end{aligned}$$

und das sind tatsächlich die inversen Formeln der Gleichungen (6).

Wir leiten weiter aus (6a) das Additionsgesetz der Geschwindigkeiten ab:

$$\begin{aligned}
 dX &= -\omega dt \cdot a \sin \omega t + \frac{a \omega d\tau}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \sin \omega t - \frac{a \omega (T' - \tau) + \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \omega dt \cos \omega t \\
 &\quad - R' \omega dt \sin \omega t - \frac{a \omega dT' + d\Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \sin \omega t + dR' \cos \omega t, \\
 dY &= \omega dt a \cos \omega t - \frac{a \omega d\tau}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \cos \omega t - \frac{a \omega (T' - \tau) + \Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \omega dt \sin \omega t \\
 &\quad + R' \omega dt \cos \omega t + \frac{a \omega dT' + d\Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \cos \omega t + dR' \sin \omega t,
 \end{aligned}$$

$$dZ = dZ'$$

$$dT = dt - \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} + \frac{dT' + a\omega/c^2 d\Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}},$$

woraus weiter unter Berücksichtigung von (6a) und $dr = dt \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}$:

$$dX + \omega dt(Y - y) = - \frac{a\omega dT' + d\Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \sin \omega t + dR' \cos \omega t,$$

$$dY - \omega dt(X - x) = \frac{a\omega dT' + d\Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}} \cos \omega t + dR' \sin \omega t,$$

$$dZ = dZ',$$

$$dT = \frac{dT' + \frac{a\omega}{c^2} d\Theta'}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}},$$

also

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dT} + \omega(Y - y) = & - \sin \omega t \left(\frac{\frac{d\Theta'}{dT'} + a\omega}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}} \right) \\ & + \cos \omega t \left(\frac{\frac{dR'}{dT'} \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dT} - \omega(X - x) = & + \cos \omega t \left(\frac{\frac{d\Theta'}{dT'} + a\omega}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}} \right) \\ & + \sin \omega t \left(\frac{\frac{dR'}{dT'} \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{dZ}{dT} = \frac{\frac{dZ'}{dT'} \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}}.$$

Führt man die Vektoren im XYZ -Raum ein:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R} &= (X, Y, Z), \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \\ \mathbf{u} &= (0, 0, \omega), \quad \mathbf{t}_1 = (-\sin \omega t, \cos \omega t, 0), \\ \mathbf{n}_1 &= (+\cos \omega t, +\sin \omega t, 0), \quad \mathbf{z}_1 = (0, 0, 1),\end{aligned}$$

so läßt sich in gewöhnlicher Vektorschreibweise schreiben, wenn noch $[\mathbf{u} \mathbf{r}] = a \omega t_1$ berücksichtigt wird:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d \mathfrak{R}}{d T} &= [\mathbf{u} \mathfrak{R}] + \mathbf{t}_1 \cdot \frac{d \Theta'}{d T'} \frac{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}{1 + \frac{a \omega}{c^2} \frac{d \Theta'}{d T'}}, \\ &+ \mathbf{n}_1 \cdot \frac{d R'}{d T'} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a \omega}{c^2} \frac{d \Theta'}{d T'}}, \\ &+ \mathbf{z}_1 \cdot \frac{d Z'}{d T'} \frac{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a \omega^2}{c^2} \frac{d \Theta'}{d T'}}. \end{aligned} \right.$$

Denkt man hier für den Augenblick $c = \infty$, so resultiert

$$\frac{d \mathfrak{R}}{d T} = [\mathbf{u} \mathfrak{R}] + \frac{d \mathfrak{R}'}{d T'},$$

das bekannte Additionsgesetz der klassischen Mechanik für die gleichförmige Rotation, wobei $d \mathfrak{R}'/d T'$ den vom mitbewegten System (im klassischen Sinn) beurteilten Differentialquotienten bedeutet, also die Relativgeschwindigkeit des Punktes XYZ bezüglich des rotierenden Systems.¹⁾ (Die Verschiebung des Ursprunges dieses Systems vom Zentrum an die Peripherie ist offenbar ohne Einfluß auf den Wert von $d R'/d T'$.)

Beschränkt man sich auf Glieder erster Ordnung in $a \omega/c$, so resultiert, wie zu erwarten war, wieder das klassische Additionsgesetz.

Als Folgerungen heben wir ferner hervor:

Ein im ruhenden System XYZ ruhender Punkt beschreibt, vom rotierenden System $\Theta' R' Z'$ gesehen, nicht etwa wie in der klassischen Mechanik eine Kreisbahn im entgegengesetzten Sinn und mit (absolut) gleicher Winkelgeschwindig-

¹⁾ Abraham-Föppel, Theorie der Elektrizität. Teubner, Leipzig (1904) § 9.

keit ω wie der Beobachter B ; dies ist vielmehr nur der Fall, wenn man sich auf Größen erster Ordnung beschränkt.

4. Für den Punkt B des rotierenden Systems läßt sich die Invarianz der Lichtgeschwindigkeit zeigen. Für die anderen Punkte des rotierenden Systems braucht dies nicht mehr der Fall zu sein, wenn sie von B aus betrachtet werden.

In der Tat kann statt (7) geschrieben werden

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{R}}{dT} - [u, \mathfrak{R} - r] = t_1 \frac{\frac{d\Theta'}{dT'} + a\omega}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}} + n_1 \frac{\frac{dR'}{dT'} \sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}} \\ + \delta_1 \frac{\frac{dZ'}{dT'} \sqrt{1 - \frac{a^2\omega^2}{c^2}}}{1 + \frac{a\omega}{c^2} \frac{d\Theta'}{dT'}}. \end{aligned}$$

Man erkennt in der rechten Seite die Form des Einsteinschen Additionsgesetzes für eine geradlinige Translation in der Richtung t_1 , vom Betrage $a\omega$. Die linke Seite ist aber nicht wie beim Einsteinschen Gesetz die Absolutgeschwindigkeit vom ruhenden System aus gesehen, sondern diese Absolutgeschwindigkeit vermindert um die Geschwindigkeit

$$[u, \mathfrak{R} - r],$$

um welche sich die Bewegung eines im bewegten System festen Punktes von der geradlinigen Translation unterscheidet. Scheidet man also diese aus, indem man statt der vom ruhenden System aus gesehenen Geschwindigkeit

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dT},$$

(welche sich zusammensetzt aus 1. Translation $a\omega$ in Richtung t_1 , 2. Relativbewegung im gestrichenen System, 3. Differenz der Rotation gegen die Translation: $[u, \mathfrak{R} - r]$) einführt:

$$\frac{d\mathfrak{R}}{dT} - [u, \mathfrak{R} - r],$$

so kann man offenbar die für die geradlinige Translation geltenden Formeln auf diesen Fall übertragen, womit man wieder die obigen Formeln erhält.

Für die Translation gilt Invarianz der Lichtgeschwindigkeit. Dies bestätigen auch die obigen Formeln bzw. ihre inversen. Diese Invarianz kann also nicht mehr für die Rotation gelten, außer da, wo sie sich nicht oder unmerklich von der Translation unterscheidet; dies bestätigen wieder die obigen Formeln, wenn man $R = r$ setzt. Der Beobachter findet auch im rotierenden System den Wert c für die Lichtgeschwindigkeit, sofern er seine Versuche auf die nächste Umgebung beschränkt.

Für Vorgänge in weiterer Entfernung hingegen wird die Lichtgeschwindigkeit durch die Rotation des Bezugskörpers beeinflusst, ausgenommen die Sehlinie des Beobachters weist der Rotationsachse parallel. Die Bahn der Lichtstrahlen ist natürlich vom rotierenden System aus gesehen krumm.

Aus dem Umstand, daß die Transformationsformeln nur von zweiter Ordnung in $a\omega/c$ von dem gewöhnlichen Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik unterschieden sind, folgt sofort für den von Sagnac¹⁾ beobachteten Effekt, bei welchem zwei Lichtstrahlen zur Interferenz in einem Punkte B eines rotierenden Zylinders gelangen, nachdem sie der eine im Sinne, der andere entgegen der Rotation mit Hilfe mehrfacher Reflexionen an den Wänden des Zylinders von B ausgehend einen polygonalen Umlauf zurückgelegt haben, daß dieser Effekt, als von erster Ordnung in $a\omega/c$, durch die Transformationen nicht kompensiert werden kann, also unabhängig von der Entscheidung zwischen altem und neuem Relativitätsprinzip besteht.

Es ist übrigens selbstverständlich, daß dem Beobachter auf beschleunigtem Bezugskörper seine beschleunigte Bewegung nicht verborgen bleiben kann, sobald er mit relativ zum Bezugskörper bewegten Vorgängen experimentiert. Es ist wohl überflüssig darauf hinzuweisen, daß Formeln, welche bloß durch Glieder zweiter Ordnung von denen der alten Mechanik sich unterscheiden, das dort Geltende nicht wesentlich werden verändern können, solange nicht Effekte zweiter Ordnung gefunden sind.

1) G. Sagnac, Compt. rend. 27./X. 1913 u. 22./XII. 1913; H. Witte, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1914. Nr. 3.

Anhang.

1. Aus der Differentialgeometrie der Weltlinien.¹⁾

Gerade durch zwei konsekutive Kurvenpunkte: Tangente (Einheitsvektor: c_1).

Ebene durch drei konsekutive Kurvenpunkte: Schmiegungeebene.

Raum durch vier konsekutive Kurvenpunkte: Schmiegungsraum.

Normale zur Tangente in der Schmiegungeebene: Hauptnormale (c_2).

Normale zur Schmiegungeebene im Schmiegungsraum: Binormale (c_3).

Normale zum Schmiegungsraum: Trinormale (c_4).

Bogenelement der Kurve: Abstand zweier konsekutiver Punkte (ds).

Winkel zwischen zwei konsekutiven Tangenten: erster Kontingenzwinkel ($d\omega_1$).

Winkel zwischen zwei konsekutiven Schmiegungeebenen: zweiter Kontingenzwinkel ($d\omega_2$).

Winkel zwischen zwei konsekutiven Schmiegungräumen: dritter Kontingenzwinkel ($d\omega_3$).

Erste Krümmung: $\frac{1}{R_1} = \frac{d\omega_1}{ds}$.

Zweite Krümmung: $\frac{1}{R_2} = \frac{d\omega_2}{ds}$.

Dritte Krümmung: $\frac{1}{R_3} = \frac{d\omega_3}{ds}$.

(Alle drei stets positiv genommen; in der dreidimensionalen Differentialgeometrie pflegt man die erste Krümmung, die dort Krümmung schlechtweg heißt, stets positiv, die zweite Krümmung, die dort Torsion heißt, dagegen positiv bzw. negativ zu nehmen, je nachdem der Windungssinn der Kurve negativ bzw. positiv ist. Dafür ist dann das begleitende Dreikant stets vom selben Windungssinn wie das Koordinatensystem, was bei *unserem* begleitenden Vierkant nicht mehr der Fall ist. Vgl. Landsberg l. c.)²⁾

1) Vgl. G. Brunel, Math. Ann. 19. u. G. Landsberg, Crelle's Journ. 114. u. Kottler, l. c. § 7—8.

2) Die Hauptnormale einer Weltlinie zeigt natürlich nach der konvexen Seite. (Krümmungshyperbel an Stelle des Krümmungskreises bei reeller Darstellung)

Begleitendes Vierkant: $c_1 c_2 c_3 c_4$.

Konsekutives Vierkant: $c_1 + d c_1 c_2 + d c_2 c_3 + d c_3 c_4 + d c_4$.

Den Übergang vom ersteren zum letzteren vermittelt (abgesehen von der Schiebung des Ursprunges um ds in Richtung der Tangente) eine *orthogonale infinitesimale Transformation*, die angegeben wird durch die *Frenetschen Formeln*:

$$\left. \begin{aligned} d c_1^{(h)} &= * c_2^{(h)} d \omega_1 * \\ d c_2^{(h)} &= - c_1^{(h)} d \omega_1 * + c_3^{(h)} d \omega_2 * \\ d c_3^{(h)} &= * - c_2^{(h)} d \omega_2 * + c_4^{(h)} d \omega_3 * \\ d c_4^{(h)} &= * * - c_3^{(h)} d \omega_3 * \end{aligned} \right\} h = 1, 2, 3, 4$$

Dies auf die gewohnte Form (1) § 1 zu bringen denke man sich bloß einen Radiusvektor (durch skalare Multiplikation) einmal nach den Achsen $c_1 c_2 c_3 c_4$ und einmal nach den Achsen $c_1 + d c_1, c_2 + d c_2, c_3 + d c_3, c_4 + d c_4$ zerlegt, wobei beide Achsensysteme im selben Ursprung angesetzt werden.

Bedeutung der Frenetschen Formeln:

Eine Drehung in der Ebene $[c_1 c_2]$ um $d \omega_1 = \frac{ds}{R_1}$ von c_1 gegen c_2

„ „ „ „ „ $[c_2 c_3]$ „ $d \omega_2 = \frac{ds}{R_2}$ „ c_2 „ c_3

„ „ „ „ „ $[c_3 c_4]$ „ $d \omega_3 = \frac{ds}{R_3}$ „ c_3 „ c_4

Invarianten der Transformation [vgl. $E(du)^2$ bzw. $E(du)^2$ (§ 1)]

$$(d \omega_1)^2 + (d \omega_2)^2 + (d \omega_3)^2 = ds^2 \left\{ \left(\frac{1}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_3} \right)^2 \right\}$$

$$d \omega_1 d \omega_3 = ds^2 \frac{1}{R_1 R_3}.$$

Bei Übergang zu anderen Koordinatensystemen als $c_1 c_2 c_3 c_4$ selbst müssen diese beiden erhalten bleiben.

Weltlinien konstanter Krümmungen:

Die infinitesimale orthogonale Transformation ist wegen der Konstanz von $R_1 R_2 R_3$ längs der Kurve jeweils auf das begleitende Vierkant bezogen immer ein und dieselbe.

Schar von solchen Weltlinien, die zu einer orthogonalen Transformation gehört: Gekennzeichnet durch Identität der beiden Invarianten

$$(ds)^2 \left\{ \left(\frac{1}{R_1} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} \right)^2 + \left(\frac{1}{R_3} \right)^2 \right\} \text{ bzw. } (ds)^2 \frac{1}{R_1 R_3}$$

von Kurve zu Kurve. Man bemerke hierbei, daß der Parameter s nicht universal ist, wie der in § 1 gebrauchte Parameter u . Wohl aber läßt sich, wenn $x(s)$ bzw. $X(S)$ zwei auf ihre Bogen bezogenen Weltlinien sind und irgend eine Zuordnung zwischen s und S gewählt wird, leicht zeigen, daß

$$dS = A ds,$$

wo A längs der ganzen Kurve $X(S)$ konstant ist. Wird s in solchem Sinne als universaler Parameter gebraucht, so bedeutet er auf einer einzigen Kurve der Schar den Bogen, sonst auf keiner!

Eigenzeit: Hier wird aus formalen Gründen der Bogen s der Weltlinien immer gleich der mit ic multiplizierten Eigenzeit τ genommen

$$s = ic\tau$$

(sonst wählt man oft $\sigma = c\tau$ als reellen Bogen der Weltlinien).

Realitätsverhältnisse in dieser Darstellung:

Als Kosinusse einer zeitartigen Richtung:

$$c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)} \text{ rein imaginär, } c_1^{(4)} \text{ reell.}$$

Als Kosinusse von raumartigen Richtungen:

$$\left. \begin{array}{l} c_2^{(1)} c_2^{(2)} c_2^{(3)} \\ c_3^{(1)} c_3^{(2)} c_3^{(3)} \\ c_4^{(1)} c_4^{(2)} c_4^{(3)} \end{array} \right\} \text{ reell,} \quad \left. \begin{array}{l} c_2^{(4)} \\ c_3^{(4)} \\ c_4^{(4)} \end{array} \right\} \text{ rein imaginär.}$$

Ferner:

als Drehung in einer Ebene, die zeitartige Richtungen enthält

$$d\omega_1 \text{ rein imaginär } \left(\frac{d\omega_1}{ds} = \frac{1}{R_1} \text{ daher reell} \right)$$

als Drehungen im gewöhnlichen Sinne in bloß raumartigen Ebenen:

$$d\omega_2 \text{ bzw. } d\omega_3 \text{ reell } \left(\frac{d\omega_2}{ds} = \frac{1}{R_2}, \frac{d\omega_3}{ds} = \frac{1}{R_3} \text{ daher rein imaginär} \right).$$

Berechnung der Krümmungen und des begleitenden Vierkants.

Es sei die Weltlinie in Parameterdarstellung gegeben

$$x^{(1)} = x^{(1)}(t), \quad x^{(2)} = x^{(2)}(t), \quad x^{(3)} = x^{(3)}(t), \quad x^{(4)} = x^{(4)}(t).$$

Man bilde die ersten vier Differentialquotienten

$$\frac{dx}{dt} \text{ bzw. } \frac{d^2x}{dt^2} \text{ bzw. } \frac{d^3x}{dt^3} \text{ bzw. } \frac{d^4x}{dt^4}$$

und mit ihnen die Matrix

$$D = \begin{vmatrix} \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} & \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} & \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^3x}{dt^3} & \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^4x}{dt^4} \\ \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} & \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2x}{dt^2} & \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^3x}{dt^3} & \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^4x}{dt^4} \\ \sum \frac{d^3x}{dt^3} \frac{dx}{dt} & \sum \frac{d^3x}{dt^3} \frac{d^2x}{dt^2} & \sum \frac{d^3x}{dt^3} \frac{d^3x}{dt^3} & \sum \frac{d^3x}{dt^3} \frac{d^4x}{dt^4} \\ \sum \frac{d^4x}{dt^4} \frac{dx}{dt} & \sum \frac{d^4x}{dt^4} \frac{d^2x}{dt^2} & \sum \frac{d^4x}{dt^4} \frac{d^3x}{dt^3} & \sum \frac{d^4x}{dt^4} \frac{d^4x}{dt^4} \end{vmatrix},$$

bezeichne ihre Hauptunterdeterminanten der Reihe nach wie folgt:

$$D^I = \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} \quad D^{II} = \begin{vmatrix} \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} & \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} & \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2x}{dt^2} \end{vmatrix}$$

$$D^{III} = \dots \quad D^{IV} = \dots,$$

endlich die Unterdeterminanten der letzten Zeile jeder dieser Hauptunterdeterminanten wie folgt:

$$D_{11}^I = 1, \quad D_{21}^{II} = - \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}, \quad D_{22}^{II} = D^I = \sum \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt},$$

$$D_{31}^{III} = \begin{vmatrix} \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} & \sum \frac{dx}{dt} \frac{d^3x}{dt^3} \\ \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^2x}{dt^2} & \sum \frac{d^2x}{dt^2} \frac{d^3x}{dt^3} \end{vmatrix}, \quad D_{32}^{III} = \dots \text{ usw.}, \quad D_{41}^{IV} = \dots \text{ usw.}$$

Dann hat man

$$\left(\frac{1}{R_1} \right)^2 = \frac{D^{II} \cdot D^0}{(D^I)^2} \cdot \frac{1}{D^I}, \quad \text{wo } D^0 = 1,$$

$$\left(\frac{1}{R_2} \right)^2 = \frac{D^{III} \cdot D^I}{(D^{II})^2} \cdot \frac{1}{D^I} = \frac{D^{III}}{(D^{II})^2},$$

$$\left(\frac{1}{R_3} \right)^2 = \frac{D^{IV} \cdot D^{II}}{(D^{III})^2} \cdot \frac{1}{D^I}$$

und

$$c_1 = \frac{D_{11}^I \frac{dx}{dt}}{\sqrt{D^I \cdot D^0}}$$

$$c_2 = \frac{D_{21}^{II} \frac{dx}{dt} + D_{22}^{II} \frac{d^2x}{dt^2}}{\sqrt{D^{II} \cdot D^I}}$$

$$c_3 = \frac{D_{31}^{III} \frac{dx}{dt} + D_{32}^{III} \frac{d^2x}{dt^2} + D_{33}^{III} \frac{d^3x}{dt^3}}{\sqrt{D^{III} \cdot D^{II}}}$$

$$c_4 = \frac{D_{41}^{IV} \frac{dx}{dt} + D_{42}^{IV} \frac{d^2x}{dt^2} + D_{43}^{IV} \frac{d^3x}{dt^3} + D_{44}^{IV} \frac{d^4x}{dt^4}}{\sqrt{D^{IV} \cdot D^{III}}}$$

2. Der Zusammenhang der Minkowskischen Weltlinie mit dem Hamiltonschen Hodographen der Geschwindigkeit.

Sei t die Zeit, also $x^{(4)} = ict$, so wird die Matrix

$$D \equiv \begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} & v \ddot{v} & v \ddot{\bar{v}} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} & \dot{v} \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{v} v & \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 & \ddot{v} \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{\bar{v}} v & \ddot{\bar{v}} \dot{v} & \ddot{\bar{v}} \ddot{v} & \ddot{\bar{v}}^2 \end{vmatrix},$$

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{\begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 \end{vmatrix}}{(v^2 - c^2)^2},$$

$$\frac{1}{R_2^2} = \frac{\begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} & v \ddot{v} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} \\ \ddot{v} v & \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 \end{vmatrix}}{\left(\begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 \end{vmatrix} \right)^2},$$

$$\frac{1}{R_3^2} = \frac{\begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} & v \ddot{v} & v \ddot{\bar{v}} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} & \dot{v} \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{v} v & \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 & \ddot{v} \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{\bar{v}} v & \ddot{\bar{v}} \dot{v} & \ddot{\bar{v}} \ddot{v} & \ddot{\bar{v}}^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 \end{vmatrix}}{\left(\begin{vmatrix} v^2 - c^2 & v \dot{v} & v \ddot{v} \\ \dot{v} v & \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} \end{vmatrix} \right)^2 (v^2 - c^2)}.$$

Geht man zur Grenze $c = \infty$, so bemerkt man, daß die Grenzwerte existieren

$$\lim_{c=\infty} \frac{c^4}{R_1^2} = \dot{v}^2,$$

$$\lim_{c=\infty} \left(-\frac{c^2}{R_2^2} \right) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} \\ \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 \end{vmatrix}}{(\dot{v}^2)^2},$$

$$\lim_{c=\infty} \left(-\frac{c^2}{R_3^2} \right) = \frac{\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} & \dot{v} \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 & \ddot{v} \ddot{\bar{v}} \\ \ddot{\bar{v}} \dot{v} & \ddot{\bar{v}} \ddot{v} & \ddot{\bar{v}}^2 \end{vmatrix}}{\left(\begin{vmatrix} \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} \\ \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 \end{vmatrix} \right)^2} \dot{v}^2.$$

Betrachtet man aber im S_3 die Kurve (Hamiltons Hodograph der Geschwindigkeit)

$$v_x = v_x(t) \quad v_y = v_y(t) \quad v_z = v_z(t)$$

und konstruiert die Matrix \mathfrak{D} aus den ersten drei Differentialquotienten

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} \dot{v}^2 & \dot{v} \ddot{v} & \dot{v} \ddot{v} \\ \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v}^2 & \ddot{v} \ddot{v} \\ \ddot{v} \dot{v} & \ddot{v} \ddot{v} & \ddot{v}^2 \end{vmatrix},$$

die hier für die Berechnung der Krümmungen $1/\mathfrak{R}_1$ bzw. $1/\mathfrak{R}_2$ und für das begleitende Dreikant maßgebend ist, so findet man, wenn wieder $\mathfrak{D}' \mathfrak{D}'' \mathfrak{D}'''$ die drei Hauptunterdeterminanten der Matrix \mathfrak{D} sind, offenbar:

$$\lim_{c=\infty} \frac{c^4}{R_1^2} = \mathfrak{D}',$$

$$\lim_{c=\infty} \left(-\frac{c^2}{R_2^2} \right) = \frac{\mathfrak{D}''}{(\mathfrak{D}')^2} = \mathfrak{D}' \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_1} \right)^2,$$

$$\lim_{c=\infty} \left(-\frac{c^2}{R_3^2} \right) = \frac{\mathfrak{D}''' \mathfrak{D}'}{(\mathfrak{D}'')^2} = \mathfrak{D}' \cdot \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_2} \right)^2.$$

Denselben Zusammenhang findet man natürlich, wenn $v = 0$ ist (also im Eigensystem; für $\dot{v} \ddot{v} \ddot{v}$ sind aber dann die erste bzw. zweite bzw. dritte *Eigenbeschleunigung* einzusetzen) oder wenn v klein gegen die Lichtgeschwindigkeit ist, so daß v/c vernachlässigt werden kann, ohne daß wir in diesen beiden Fällen zur Newtonschen Mechanik (d. h. $c = \infty$) zu greifen brauchen.

Insbesondere wenn $1/R_1, 1/R_2, 1/R_3$ alle drei konstant, so sind $\dot{v}, 1/\mathfrak{R}_1, 1/\mathfrak{R}_2$ konstant. Die Bewegung geht also mit konstanter Beschleunigung vor sich, wobei überdies der Hamiltonsche Hodograph eine *gemeine Schraubenlinie* (entspricht unserem Typ I und bedeutet freien Fall und gleichförmige Rotation um die Fallgerade) oder eine Kreislinie (II: gleichförmige Rotation) oder eine Gerade (III: freier Fall) oder ein Punkt (V: gleichförmige Translation) sein muß. Zu allen diesen kann noch eine beliebige gleichförmige Translation treten. IV hat, da R_1 und R_2 von ungleicher Ordnung in c , kein Newtonsches Analogon.

3. Eigensysteme.

„*Eigensystem*“ eines beliebig bewegten materiellen Punktes ist offenbar ein jedes, dessen Zeitachse mit der jeweiligen Tangente der Weltlinie des Punktes zusammenfällt, gleichgültig wie die Raumachsen orientiert sind. Ein mit dem Punkte bewegter Beobachter glaubt, solange ihm keine gegenteilige Erfahrung widerfährt, mit dem Recht eines naiven Realisten sich selbst in Ruhe.

Aber physikalische Realität kommt einem solchen Bezugssystem *nicht* zu. Vom Standpunkt physikalischer Realität ist nämlich der Ersatz des Raumachsensystems durch einen Bezugskörper zu verlangen, mit Bezug auf den erst die drei Raumachsen definiert werden können. Soll nun also, wenn der obige materielle Punkt durch einen materiellen Körper ersetzt wird, auch hier von einem „*Eigensystem*“ die Rede sein können, in dem Sinne, daß ein auf dem Bezugskörper befindlicher Beobachter sich in Ruhe glauben kann, so ist notwendig, daß von diesem Eigensystem aus der Körper sich als „in Ruhe“ darstellt, d. h. aber, daß die Eigenkoordinaten jedes Punktes konstant sein müssen, gleichgültig wo immer auch auf dem Körper der Beobachter sich aufstellt. Das ist aber nichts anderes als der Bornsche starre Körper. Denn für diesen gilt: Irgend zwei seiner Weltlinien können so aufeinander bezogen werden, daß zwei entsprechende Punkte durch eine konstante Strecke einer Geraden verbunden bleiben, die jeweils beide Kurven normal trifft (Äquidistanz). Führt man also in dem einen dieser Punkte irgendein System ein, dessen Zeitachse mit der dortigen Tangente übereinstimmt, so ist die „gleichzeitige“ Lage des zweiten bewegten Punktes offenbar die durch die erwähnte Beziehung angegebene und die so bestimmte Entfernung bleibt dann während der ganzen Bewegung konstant. Wählt man also in irgendeiner Lage des ersten Punktes außer dem zweiten Punkt noch einen dritten auf einer dritten Weltlinie und einen vierten auf einer Weltlinie gelegenen Punkt, die alle mit dem ersten „gleichzeitig“ sind, so hat man der obigen Forderung entsprechend ein Eigensystem von drei Raumachsen, den drei Richtungen vom ersten Punkte zu den drei anderen, das offenbar durch pas-

sende Wahl der Punkte orthogonal gemacht werden kann und im Bezugskörper fest ist.

Dies allein nennen wir ein Eigensystem, insofern der Bezugskörper, als dessen Gerüst es auftritt, in ihm ruht. Herglotz¹⁾ hat gezeigt, daß aus der Definition der Äquidistanz folgt, daß die Weltlinien des Bornschen Körpers „Parallelkurven“ (Bezeichnung von Scheffers) zu irgendeiner von ihnen (erste Art) oder Bahnkurven einer „Bewegung“ des S_4 (zweite Art) sein müssen.

Was den Bornschen Körper erster Art anlangt, so läßt sich das Eigensystem leicht angeben²⁾, in welchem er durch konstante Eigenkoordinaten dargestellt wird. Hier möge nur soviel gesagt werden, daß man die drei Raumachsen findet, wenn man verlangt, daß sie *starr mit der Tangente* verbunden bleiben, auch nicht um sie rotieren dürfen. Bezieht man sie also auf das begleitende Vierkant, d. h. setzt man für ihre Richtungskosinusse, die mit $b_2^{(h)}$ bzw. $b_3^{(h)}$ bzw. $b_4^{(h)}$ ($h = 1, 2, 3, 4$) bezeichnet werden mögen,

$$b_2 = \beta_2^{(2)} c_2 + \beta_2^{(3)} c_3 + \beta_2^{(4)} c_4 \quad (\text{analog für } b_3 \text{ bzw. } b_4),$$

so können die β natürlich nicht konstant sein, da die $c_2 c_3 c_4$, wie wir sahen, die Drehungen

$$d\omega_2 \text{ bzw. } d\omega_3$$

um die Tangente c_1 ausführen. Diese Drehungen müssen also durch passende Änderung der β *kompensiert* werden, indem die β die *entgegengesetzte* orthogonale Transformation³⁾ wie die Achsen $c_2 c_3 c_4$ erfahren müssen.

Aber auch den Bornschen Körper erster Art können wir noch nicht als Bezugskörper für ein wirkliches Eigensystem zulassen, in dem der Beobachter, sofern er nicht sein Augenmerk auf äußere Vorgänge richtet (Foucaultscher Pendelversuch usw.), nichts von seiner Bewegung merken wird. Denn auch hier läßt die physikalische Realität nicht zu, daß wir wie Newton und Galilei die gleichzeitigen Lagen der Welt ins Auge fassen. Wir sehen ja mit Hilfe des Lichtes

1) G. Herglotz, l. c.

2) F. Kottler, l. c., § 7.

3) Natürlich die kontragrediente reziproke.

und alles was wir sehen, liegt um die Latenzzeit hinter unserem Zeitpunkt zurück, wenn anders wir nicht mit Newton und Galilei die Lichtgeschwindigkeit unendlich setzen. Wenn aber ein Beobachter auf dem Bornschen Körper erster Art seine nicht gleichzeitige Umgebung betrachtet, so sind ihre Eigenkoordinaten selbstverständlich willkürlich variabel, er muß daran seine Bewegung erkennen.

Nur beim Bornschen Körper zweiter Art sind die Eigenkoordinaten auch nichtgleichzeitiger Lagen konstant, wie wir ja aus der Darstellung des § 4

$$X = x + \Gamma^{(1)} c_1 + \Gamma^{(2)} c_2 + \Gamma^{(3)} c_3 + \Gamma^{(4)} c_4$$

entnehmen. Also exakt, unter Berücksichtigung der Latenzzeiten auch der nächsten Umgebung, gibt es nur wenige beschleunigte Bewegungen, auf denen ein Beobachter, dem nicht physikalische Experimente zur Verfügung stehen, glauben kann, er ruhe.

Für diese beschleunigten Bewegungen haben wir des weiteren gefunden, daß ein Gleichgewicht, das einmal während der Bewegung eingetreten, in alle Ewigkeit erhalten bleiben muß, was ja in der Tat daraus folgt, daß die Eigenkoordinaten der Punkte des Körpers konstant sind.

Freilich weist eine solche „Welt“, wie sie sich vom Bezugskörper präsentiert, für Nichtgleichgewichtsvorgänge abnorme Erscheinungen, scheinbare Beschleunigungen, Veränderung der Lichtgeschwindigkeit usw. gegen die gewohnte Welt auf.

4. Diese letztere zu zeigen, wollen wir das Bogenelement der „Welt“ aufstellen, wie sie sich einem in Bornscher Hyperbelfallbewegung begriffenen Beobachter darstellt; wir schreiben:¹⁾

$$X = x + ic(T' - \tau) c_1 - Z' c_2 + X' c_3 + Y' c_4$$

und benutzen die Frenetschen Formeln, die hier lauten

1) Hier wird die Annahme $\Gamma^{(2)} = -Z'$ gemacht, damit die Eigenbeschleunigung nach der positiven Z' -Achse gerichtet sei. Denn die Minkowskische Kraft $K = -m_0 \frac{c^2}{R_1} c_2$.

$$(s = ic\tau) \quad \frac{dc_1}{ds} = \frac{1}{R_1} c_2 \quad \frac{dc_2}{ds} = -\frac{1}{R_1} c_1 \quad \frac{dc_3}{ds} = \frac{dc_4}{ds} = 0.$$

Es kommt

$$\begin{aligned} dX &= dx - ds \cdot c_1 + ic dT' \cdot c_1 + Z' \cdot \frac{ds}{R_1} \cdot c_1, \\ &+ ic(T' - \tau) \frac{ds}{R_1} c_2 - dZ' \cdot c_2, \\ &+ dX' \cdot c_3, \\ &+ dY' \cdot c_4. \end{aligned}$$

Dabei ist natürlich:

$$dx = ds \cdot c_1$$

und nun wollen wir

$$T' = \tau$$

setzen, was offenbar eine Zuordnung beinhaltet, mit Hilfe welcher wir die Aufeinanderfolge der Zeit, wie sie sich dem Beobachter darstellt, regeln. Es kommt:

$$\begin{aligned} dX &= c_1 \cdot ic dT' \left(1 + \frac{Z'}{R_1}\right), \\ &- c_2 \cdot dZ', \\ &c_3 \cdot dX', \\ &c_4 \cdot dY'. \end{aligned}$$

Es kommt weiter:

$$dS^2 = (dX')^2 + (dY')^2 + (dZ')^2 - c^2 \left(1 + \frac{Z'}{R_1}\right)^2 (dT')^2.$$

Nach Tab. 1, Kol. 8 ist aber

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{b}$$

wo c^2/b die Minkowskische Eigenbeschleunigung; es wird also

$$dS^2 = (dX')^2 + (dY')^2 + (dZ')^2 - \left(c + \frac{Z'c}{b}\right)^2 dT'.$$

Also für die vom Beobachter betrachtete Lichtgeschwindigkeit

$$c' = c + \frac{Z' c^2}{b} \cdot \frac{1}{c}.$$

Aber $+ Z' c^2/b$ ist nichts anderes als das „Potential“ der Minkowskischen Kraft:

$$K' = - m_0 \text{ Grad } \Phi,$$

wenn sie vom Eigensystem aus als scheinbare Kraft betrachtet wird; daher

$$c' = c + \Phi/c.^1)$$

1) Vgl. A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **38**, p. 356—359. 1912.

(Eingegangen 9. April 1914.)

3. *Über das Wesen der Emission der in Flammen leuchtenden Metalldämpfe;* *von Hedwig Kohn.*

(Auszug aus der Breslauer Dissertation 1913.)

Seit Kirchhoff haben sich zahlreiche Untersuchungen damit beschäftigt, das Wesen der Lichtemission der in Flammen leuchtenden Gase zu ergründen. Kirchhoff¹⁾ selbst nahm an, daß für diese Gase die Voraussetzungen seines Strahlungsgesetzes erfüllt sind, d. h. daß sie reine Temperaturstrahler sind, die lediglich auf Kosten von Wärme Strahlung emittieren und alle absorbierte Strahlung in Wärme umsetzen; er hat jedoch keinen strengen Beweis für diese Annahme erbracht. — Allgemein kann man mit ziemlicher Sicherheit schließen, daß ein Körper ein Temperaturstrahler ist, wenn er quantitativ dem Kirchhoffschen Gesetz gehorcht. Um dies zu prüfen²⁾, hat man für die Wellenlänge λ das Emissionsvermögen E_λ und das Absorptionsvermögen A_λ des strahlenden Körpers zu messen und auf Grund des Planckschen Gesetzes die Temperatur T_λ zu berechnen, bei welcher das Emissionsvermögen $\epsilon_{\lambda, T_\lambda}$ des schwarzen Körpers gleich dem Verhältnis E_λ/A_λ ist. Diese Temperatur bezeichnet Pringsheim als die „spezifische“, E. Bauer als die „Emissionstemperatur“ des Körpers.³⁾ Gleichzeitig hat man die wahre thermische Tem-

1) G. Kirchhoff, Über die Fraunhoferschen Linien, Monatsber. d. Berl. Akad. Okt. 1859, desgl. Pogg. Ann. 109. p. 148—150. 1860, ferner: „Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente“, Abh. d. Berl. Akad. 1861, auch Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 100, Leipzig 1898.

2) Vgl. E. Pringsheim, Temperaturstrahlung und Lumineszenz, Scientia 13. p. 188. 1913; ferner: Zur Theorie der Lumineszenz, Jahresbericht d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1912.

3) E. Pringsheim, l. c. p. 188. 1913; E. Bauer, Recherches sur le rayonnement, Thèses, Paris, Gauthier-Villars, 1912; auch bereits: Sur le rayonnement et la température des flammes, Le Radium 6. 1909.

peratur T des Körpers zu messen und mit T_1 zu vergleichen. Sind T und T_1 identisch, so gehorcht der Körper quantitativ dem Kirchhoffschen Gesetz. Bei leuchtenden Gasen erfolgt die Bestimmung der Temperatur T_1 im Sichtbaren nach der bequemen und exakten Methode der Linienumkehr, welche von Féry¹⁾ für quantitative Messungen ausgebaut wurde: Im Spektrometer betrachtet man das kontinuierliche Spektrum einer Lichtquelle, deren Strahlen das zu untersuchende glühende Gas durchsetzen. Je nach der Intensität der Lichtquelle hebt sich die von dem Gas emittierte Spektrallinie hell oder dunkel vom kontinuierlichen Spektrum ab; sie verschwindet, wenn die sog. umkehrende Lichtquelle die (schwarze) Temperatur T_1 , also das Emissionsvermögen e_{λ, T_1} hat, da dann das Gas die gleiche Intensität, $A_{\lambda} \cdot e_{\lambda, T_1} = E_{\lambda}$, absorbiert, wie emittiert. Die Temperatur T_1 wird durch Vergleich der umkehrenden Lichtquelle mit dem schwarzen Körper oder mit einem geeichten optischen Pyrometer gewonnen; sie liefert uns also die „spezifische“ oder „Emissionstemperatur“ des Gases, die ich im folgenden, insofern sie nach der Umkehrmethode bestimmt ist, als „Umkehrtemperatur“ bezeichnen will.

Die quantitative Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes erfordert also die Kenntnis der Gesetze der schwarzen Strahlung und ihre experimentelle Verwirklichung. Zur Zeit der ersten Untersuchungen der Emissionsursachen glühender Gase waren beide noch nicht genügend entwickelt; daher nahm man das Problem von einer anderen Seite her in Angriff und untersuchte, ob Gase überhaupt durch bloße Temperaturerhöhung zum Leuchten gebracht werden können.²⁾ Pringsheim³⁾ kam zu dem Resultat, daß diese Annahme „für ein Linienspektrum eine weder aus experimentellen noch aus theoretischen Gründen notwendige Hypothese ist“, und daß zum mindesten zur Er-

1) Ch. Féry, Sur la température des flammes, *Compt. rend.* 137. p. 909. 1903.

2) Ausführliche Literaturangaben über diese Arbeiten sind in Kayzers Handbuch der Spektroskopie, Bd. II, Kap. 3, ebenso in Pringsheims Rapport présenté au Congrès International de Physique en 1900 zu finden.

3) E. Pringsheim, Das Kirchhoffsche Gesetz und die Strahlung der Gase, *Ann. d. Phys.* 145. p. 428—459. 1892.

zeugung der emittierenden Zentren chemische Vorgänge erforderlich sind. Ein Bandenspektrum dagegen kann, nach den Untersuchungen Paschens¹⁾ an Kohlensäure und Wasserdampf, durch bloße Temperaturerhöhung erzeugt werden.

Aber auch die neueren Arbeiten führen die quantitative Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes meist nicht streng durch. Féry²⁾, Kurlbaum und G. Schulze³⁾ und E. Bauer⁴⁾ bestimmen die Temperatur T_1 für verschiedene von der gefärbten Bunsenflamme emittierte Linien, speziell Bauer für zahlreiche im Sichtbaren gelegene Linien und Banden und auch für die im Gebiete der Reststrahlen des Flußspats ($25,5 \mu$) gelegene Wasserdampfbande, ohne aber gleichzeitig die thermische Temperatur T der Flamme zu messen. Aus der Übereinstimmung der Emissionstemperaturen für die einzelnen Linien und Banden, die ja unter vollkommen verschiedenen chemischen Bedingungen emittiert werden, schließt Bauer, wie auch schon Féry, auf Temperaturstrahlung in der Flamme. Kurlbaum und Schulze dagegen beobachten eine Abhängigkeit der Umkehrtemperatur von der Art des in die Flamme eingeführten Salzes, aus welcher sie auf Lumineszenzvorgänge schließen. H. Schmidt⁵⁾ mißt die Emissionstemperatur der Kohlensäurebanden ($\lambda = 2,73 \mu$ und $\lambda = 4,4 \mu$) der Bec Mékerflamme und gleichzeitig die thermische Temperatur dieser Flamme. Aus der Übereinstimmung beider auf 30° folgert Schmidt, daß „Lumineszenz und Temperaturstrahlung sich in ein gewisses Gleichgewicht setzen, so daß wir mit der resultierenden Energie annähernd wie mit reiner Temperaturstrahlung operieren können“. Die Schmidtschen Versuche sind also die ersten, die zu einem eindeutigen Schluß führen, jedoch gelten sie nur für ein ultrarotes Bandenspektrum und für die hoch temperierte Flamme des Bec Méker. In kälteren Flammen

1) F. Paschen, Über die Emission erhitzter Gase, Ann. d. Phys. 50. p. 409—443. 1893; Ann. d. Phys. 52. p. 209—237. 1894.

2) Ch. Féry, l. c. 1903.

3) F. Kurlbaum und Günther Schulze, Temperatur nicht-leuchtender, mit Metallsalzen gefärbter Flammen, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. p. 239. 1906.

4) E. Bauer, l. c. 1909 und 1912.

5) Hans Schmidt, Prüfung der Strahlungsgesetze der Bunsenflamme, Inaug.-Diss. Berlin 1909; vgl. auch Ann. d. Phys. 29. p. 1027. 1909.

kann möglicherweise der Einfluß der Temperatur hinter chemischen Vorgängen zurücktreten.

In der vorliegenden Arbeit, die ich auf Anregung von Hrn. Geheimrat Lummer und Hrn. Prof. Pringsheim ausführte, wird die quantitative Prüfung des Kirchhoffschen Gesetzes in der oben angegebenen Weise für die Emissionslinien der in der Bunsenflamme leuchtenden Alkalimetall-dämpfe durchgeführt, indem *gleichzeitig die wahre Temperatur und die Umkehrtemperatur des Dampfes* mit der größten Genauigkeit, die die heutigen Mittel der Strahlungsmessung erreichen lassen, bestimmt werden. Die wahre Flammentemperatur wird dabei in möglichst großen Intervallen variiert.¹⁾

§ 1. Relative Messungen.

Der Vergleich der wahren Flammen- und der Umkehrtemperatur hat nur dann einen Sinn, wenn die letztere von allen äußeren Versuchsbedingungen unabhängig ist. Durch relative Messungen, die in der Dissertation (p. 11—27, Tab. 1 bis 5) eingehend besprochen werden, wurde festgestellt, daß die *Umkehrtemperatur innerhalb 5—8° unabhängig* ist:

1. von der *Spektrometerspaltbreite* und der *Dispersion*; erstere wurde von 0,03—0,10 mm variiert, letztere im Verhältnis von 1:12, durch Beobachtung mit verschiedenen Prismen und Gittern;

2. von der *Dampfdichte*, bei einer Variation derselben im Verhältnis von 1:2000, entsprechend der Variation der Flammenhelligkeit im Verhältnis von 1:80²⁾;

3. von der *Art des in die Flamme eingeführten Salzes*, falls durch dieses nach der von E. Bauer³⁾ angegebenen Methode

1) Es sei bemerkt, daß diese Untersuchungen ihrer Methode nach nur etwas über die Energie aussagen können, durch welche die Emissionszentren *erregt* werden; über den die Emissionszentren *schaffenden* Vorgang geben sie keinen Aufschluß.

2) Dieses Verhältnis ist nach den Angaben in der Arbeit von R. Ladenburg u. F. Reiche, Über selektive Absorption, Sitzungsber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1912, auch Ann. d. Phys. 42. p. 181—209. 1913, berechnet.

3) E. Bauer, l. c. p. 156. 1912.

nur eine eng begrenzte Flammenzone von annähernd konstanter Temperatur gefärbt wird. Die Beobachtungen fanden an den roten K-Linien, den Na-, Li-, Tl-Linien und an den violetten Rb-Linien statt.

§ 2. Methode für die gleichzeitige Bestimmung der wahren Flammentemperatur und der Umkehrtemperatur.

Zur Ermittlung der wahren Flammentemperatur erschien zunächst die von H. Schmidt¹⁾ ausgearbeitete Methode geeignet; ihr Grundgedanke ist folgender: Führt man in einen Flammenteil von homogener Temperatur ein hinreichend langes Stück eines schwer schmelzbaren Drahtes ein, so wird dem Draht zwar weder durch Konvektion noch durch Leitung Wärme entzogen. Durch Ausstrahlung jedoch wird seine eigene Temperatur und somit auch die der ihn umgebenden Flammenteile erniedrigt. Führt man ihm aber durch elektrisches Nachheizen die ausgestrahlte Energie wieder zu, so zeigt er die wahre Flammentemperatur an.

Schmidt benutzte für seine Messungen die Flamme des Bec Méker mit rechteckiger Ausströmungsöffnung, die sich durch ihre Form besonders gut für die Beobachtungen eignet, aber nach den Untersuchungen von Bauer und Schmidt eine charakteristische Temperaturverteilung zeigt. In Richtung der Mittellinie eines Flammenquerschnittes wird sie durch Fig. 1 wiedergegeben²⁾; der unnachgeheizte Meßdraht dagegen hat in der Mitte längs einer größeren Strecke konstante Temperatur, nach den Rändern hin sinkt sie allmählich (vgl. Fig. 2). Der Draht integriert also zufolge der Wärmeleitung über die Inhomogenitäten der Flamme und liefert daher nur einen gewissen Mittelwert der Flammentemperatur. Von vornherein läßt sich nicht sagen, inwieweit dieser von der wirklichen Flammentemperatur an einer bestimmt definierten Stelle abweicht, an der die Umkehrtemperatur ermittelt werden soll. Es wurde daher ein anderer Weg eingeschlagen, der sich in gewissen Punkten an den Schmidtschen Gedankengang anlehnt, zunächst aber mehr den quantitativen Vergleich der

1) H. Schmidt, l. c. p. 1—3. 1909.

2) Näheres über die Aufnahme dieser Kurve vgl. p. 769.

Umkehrtemperatur mit der wahren thermischen Temperatur der Flamme, als wie die Bestimmung des absoluten Wertes der Flammentemperatur zum Ziel hat:

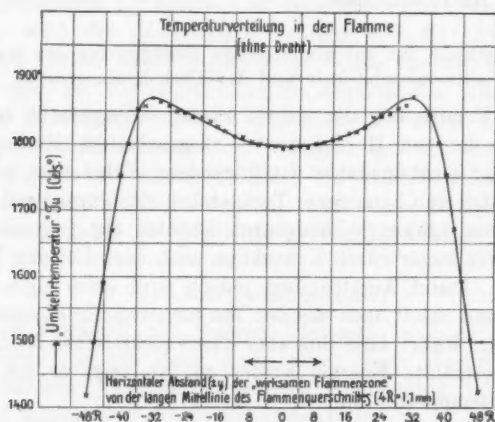


Fig. 1.

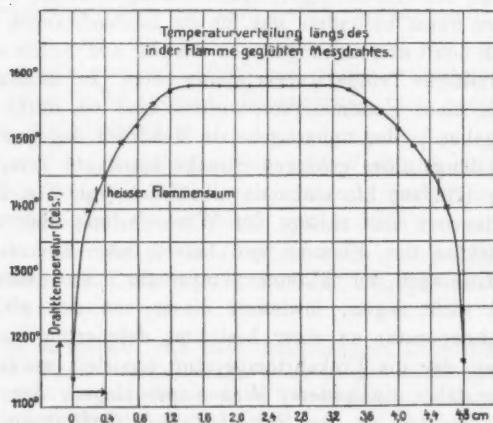


Fig. 2.

Ein in die Flamme gelegter unnachgeheizter Draht ist, wie schon erwähnt, infolge der Ausstrahlung kälter als die Flamme und bewirkt daher in den ihn umgebenden Flammen-

zonen ein mehr oder weniger steiles Temperaturgefälle. *Unmittelbar* am Draht wird, bei stetigem Temperaturübergang, die, wenn auch erniedrigte, Flammentemperatur gleich der Drahttemperatur sein und daher auch durch diese angezeigt. Um zu untersuchen, ob die Umkehrtemperatur mit der wahren Flammentemperatur identisch ist, hat man also die Umkehrtemperatur *unmittelbar* am Draht zu messen und mit der gleichzeitig zu ermittelnden Drahttemperatur zu vergleichen. Dies kann, um die Untersuchungen über ein größeres Temperaturgebiet auszudehnen, sowohl bei ungeheiztem, wie bei stufenweise elektrisch geheiztem Draht geschehen. Aus der im folgenden beschriebenen Versuchsanordnung geht hervor, daß man niemals die Umkehrtemperatur eines *unmittelbar* am Draht gelegenen Flammenpunktes erhalten wird. Denn man bestimmt immer die mittlere Umkehrtemperatur einer gewissen Flammenzone von endlicher, wenn auch geringer Ausdehnung, nämlich derjenigen Zone, durch welche das engbegrenzte Strahlenbündel der umkehrenden Lichtquelle hindurchgegangen ist. Selbst wenn diese „wirksame Zone“ den Draht berührt, so haben doch einige ihrer Punkte größeren, andere geringeren Abstand vom Draht. Die gemessene mittlere Umkehrtemperatur wird man am besten dem Schwerpunkt der „wirk-samen Zone“ zuordnen. Bestimmt man jetzt aber in zweiter Linie die *Verteilung* der Umkehrtemperatur in der *weiteren Umgebung* des Drahtes, so läßt sich hieraus auf ihren Verlauf vom *Schwerpunkt der berührenden Zone* bis zum Draht selbst und somit auch auf den Wert der Umkehrtemperatur *unmittelbar* am Draht schließen. Demnach ist also:

a) bei verschiedenen Heizstromstärken gleichzeitig die Drahttemperatur und die Umkehrtemperatur der den Draht berührenden Flammenzone zu messen,

b) bei einer Reihe wachsender Drahttemperaturen die Umkehrtemperatur als Funktion des Abstandes vom Draht zu bestimmen.

§ 3. Vorbereitende Untersuchungen.

Das Schema der Versuchsanordnung ist durch Fig. 3 gegeben. Als umkehrende Lichtquelle wurden durchweg Nernstfäden benutzt, und zwar freihängende gerade Fäden,

welche ohne Vorwärmer brennen und daher dauernde Änderungen des Heizstromes vertragen. Der horizontal hängende Nernstfaden N wird durch die Linse L_1 verkleinert in die Mitte des Flammenquerschnitts F abgebildet. Als Brenner wird der BecMékér mit rechteckiger Ausströmungsöffnung (2×5 cm) verwendet. Flamme und Bild werden durch die Linse L_2 auf den Spektrometerspalt Sp projiziert. Die Beob-

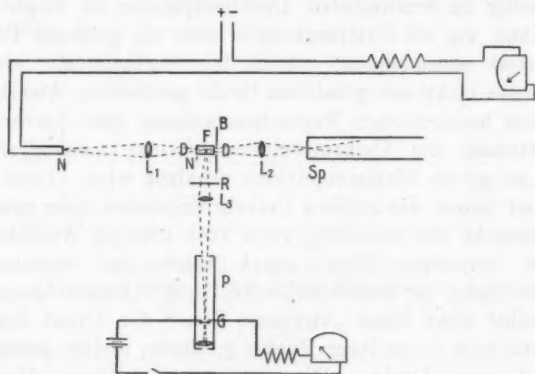


Fig. 3.

achtungen im Spektrometer wurden meist mit einem Geradsichtsprisma ausgeführt. Unmittelbar vor der Flamme ist eine Blende B angebracht; ihre Öffnung muß so gewählt sein, daß nur Strahlen aus solchen Flammenorten, durch welche das Nernstfadenlicht hindurchgegangen ist, zum Spektrometer gelangen können. Bisweilen wurde auch die erste Abbildung fortgelassen und der Nernstfaden bei N' aufgestellt.

Die Helligkeitsänderungen des Nernstfadens werden durch Variieren des Heizstromes bewirkt. Die Eichung der Fäden als schwarze Körper für alle in Frage kommenden Wellenlängen erfolgte nach der spektralphotometrischen Methode von Kurlbaum und Schulze¹⁾, nach welcher schmale Spektralbezirke der Fäden mit den entsprechenden des schwarzen Körpers bei verschiedenen bekannten Temperaturen desselben

1) F. Kurlbaum und G. Schulze, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 5. p. 427. 1903.

verglichen werden; man ermittelt die Stromstärken des Fadens, bei welchen er dieselbe Helligkeit wie der schwarze Körper hat. Auf diese Weise werden sogenannte Temperaturstromkurven erhalten; sie liefern die Umkehrtemperaturen, die zu den beim Verschwinden der Spektrallinien abgelesenen Stromstärken gehören.¹⁾

Wird der Nernstfaden an den Ort der Flamme abgebildet, so ist die Umkehrtemperatur mit der zu der Helligkeit des Bildes gehörigen Temperatur identisch, welche man aus der Temperatur des Nernstfadens, nach dem Wienschen Gesetz, mit Hilfe des Helligkeitsverhältnisses zwischen Faden und Bild berechnet.

Der BecMér war auf einem Tischchen befestigt, welches in vertikaler und horizontaler Richtung und zwar senkrecht zum Strahlengang mikrometrisch verschoben werden konnte. Bei Beginn der Messungen lief die lange Mittellinie (5 cm) des Flammenquerschnittes parallel zum Strahlengang, symmetrisch zu dem in der Flamme erzeugten Nernstfadenbild.

Zur Färbung einer engbegrenzten Flammenzone von annähernd konstanter Temperatur wurde nach der von Bauer angegebenen Methode ein kleines Stückchen Soda oder ausgeglühtes Kochsalz auf den Nickelrost des Brenners gelegt und möglichst nur derjenige Flammenteil gefärbt, durch welchen das Nernstfadenlicht hindurchging. Die vor der Flamme angebrachte Blende von 1 qmm Öffnung begrenzte die „wirksame Flammenzone“ derart, daß sie einen Querschnitt von etwa 1,7 qmm hatte; in Richtung des Strahlenganges hatte sie eine Länge von 0,5 bis höchstens 1 cm. Der Meßdraht DD wurde parallel zum Strahlengang des Nernstfadens in die Flamme gelegt, und zwar auf einen Schieferhalter, welcher während der Messungen starr mit dem Brenner verbunden blieb, so daß der Draht alle Bewegungen des Tischchens bzw. des Brenners mitmachte. Die endgültige Justierung des Drahtes konnte erst in glühendem Zustand erfolgen. Ob der Draht in der für die Untersuchungen besonders wichtigen anfäng-

1) In der Dissertation werden die Resultate dieser allgemein zu verwendenden Eichung durch Kurven und Tabellen gegeben.

lichen Lage die „wirksame Flammenzone“ von oben oder seitlich berührte, ohne den Strahlengang zu kreuzen, ließ sich auf dem Spektrometerspalt, ebenso wie im Fernrohr erkennen. In dieser „Ausgangsstellung“ betrug der Abstand des Schwerpunktes der „wirksamen Flammenzone“ vom Draht

für die Messungen oberhalb vom Draht: 0,16 mm,

„ „ „ seitlich „ „ : 0,11 „

bei der Drahtdicke von 0,84 mm und 0,13 „

„ „ „ „ 0,43 „ .

Diese Werte, deren Berechnung in der Dissertation genauer besprochen wird, gelten für ideale Justierung des Drahtes. Jede geringe Abweichung von ihr vergrößert die Abstände erheblich. Durch Senken oder seitliches Verschieben des Tischchens gelangten bei den Messungen immer andere Flammenzonen in den Strahlengang, wurden also zu „wirksamen Zonen“. Die *Änderung* ihres Abstandes vom Draht geht unmittelbar aus der Verstellung des Tischchens hervor und konnte in der Höhe auf $\frac{1}{180}$ cm, bei seitlicher Verrückung auf $\frac{1,1}{360}$ mm genau ermittelt werden.

Als Meßdraht wurde in den meisten Fällen ein Platinrhodiumdraht¹⁾ benutzt, da diese Legierung sich nach den Erfahrungen von Schmidt²⁾ als besonders geeignet erweist für die Erhitzung auf die hohen Temperaturen der BecMérkerflamme. Die schwarze Temperatur des Drahtes wurde im optischen Pyrometer nach Holborn-Kurlbaum³⁾ gemessen, und zwar senkrecht zum Strahlengang des Nernstfadens (Fig. 3, unterer Teil der Figur). Die Pyrometer-Glühlampen wurden im Verlaufe der Untersuchungen mehrfach für die Wellenlänge des Instrumentes, $\lambda = 0,644 \mu$, mit dem schwarzen Körper nach Lummer-Kurlbaum⁴⁾ geeicht. Der Draht wurde scharf und stark vergrößert an den Ort der Glühlampe *G* durch die Linse *L*₃ abgebildet, so daß er sich bequem und einwandfrei von Millimeter zu Millimeter photometrieren ließ. Da die zu

1) 10proz. Platinrhodiumdraht, von der Firma W. C. Heraeus, Hanau.

2) l. c. p. 28.

3) L. Holborn u. F. Kurlbaum, *Drud. Ann.* 10. p. 225. 1903.

4) O. Lummer u. F. Kurlbaum, *Verh. d. Deutsch. Phys. Ges.* 17. p. 106—111. 1898.

messenden Helligkeiten meist die der Glühlampen überstiegen, welche ich nie höher als bis auf etwa 1650° abs. erhitze, so wurde ein Rauchglas R zur Lichtschwächung in den Strahlengang gebracht. Die schwarze Temperatur T_s des Drahtes, die zu einer mit Rauchglas bestimmten Temperatur T_R gehört, berechnet man mit Hilfe der Wienschen Spektralgleichung in der Form:

$$\lg S = \frac{c_2 \cdot \lg e}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{T_R} - \frac{1}{T_s} \right),$$

wo $c_2 = 14600$, nach Lummer-Pringheim, gesetzt wurde und $S = \frac{\text{Intensität der ungeschwächten Strahlung}}{\text{Intensität der geschwächten Strahlung}}$.

Die wahre Temperatur T_w des Drahtes wurde aus der schwarzen wiederum nach der Wienschen Gleichung in der Form:

$$\lg A_1 = (1 - R_1) = \frac{c_2 \cdot \lg e}{\lambda} \left(\frac{1}{T_w} - \frac{1}{T_s} \right)$$

ermittelt, wo A_1 das Absorptionsvermögen, R_1 das Reflexionsvermögen des Drahtes ist. Für R_1 wurde der von Hagen u. Rubens¹⁾ bei Zimmertemperatur gemessene Wert $R_1 = 0,66$, für $\lambda = 0,644 \mu$, eingesetzt. Der größte Fehler, der der Bestimmung der schwarzen Temperatur anhaften kann, beträgt $11-12^{\circ}$ (vgl. d. Diss. p. 38—39).

Um der Bestimmung der Draht- und der Umkehrtemperatur die gleiche Temperaturskala zugrunde legen zu können, wurden die Nernstfäden ebenfalls noch mit dem Holborn-Kurlbaumschen Pyrometer geeicht. Die erste Eichung, mit dem schwarzen Körper, wird hierdurch aber nicht entbehrlich; sie vermittelt den Übergang²⁾ von der Wellenlänge des Pyrometers ($\lambda = 0,644 \mu$) zu jeder beliebigen anderen Wellenlänge, speziell zu der Wellenlänge der D -Linien, für welche die Umkehrmessungen ausgeführt wurden. Aber eine etwaige Ab-

1) E. Hagen u. H. Rubens, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 17. p. 143. 1898.

2) Dieser Übergang wird in der Dissertation ausführlich beschrieben; er führt auch zur Konstruktion der Energiekurven der Nernstfäden, aus welchen sich gewisse Strahlungseigenschaften derselben im Sichtbaren ergeben.

weichung der durch die erste Methode erhaltenen Temperaturskala von der des Pyrometers geht in die nach der zweiten Methode gewonnenen Eichkurven so gut wie gar nicht ein.

§ 4. Die Messungen.

Bei der Beschreibung der Messungen will ich mich der folgenden Bezeichnungen bedienen:

T_P = wahre Temperatur des Meßdrahtes (meist in C.^o),

T_U = Umkehrtemperatur,

J = Heizstromstärke des Meßdrahtes (in Amp.),

x = vertikaler Abstand,

$\pm y$ = horizontaler Abstand der „wirksamen Flammenzone“ vom Draht; x und y werden im Winkelgrad angegeben, weil solche auf den Mikrometerschrauben des Tischchens abzulesen waren; es ist

$$x = 1^\circ = \frac{1}{180} \text{ cm} = 0,055 \text{ mm},$$

$$y = 1^\circ = \frac{1,1}{360} \text{ mm} = 0,003 \text{ „}$$

a) Die Messungen bei stufenweisem Nachheizen des Meßdrahtes.

Der Brenner wird in die „Ausgangsstellung“ für die Messungen oberhalb des Drahtes gebracht, der Heizstrom eingeschaltet¹⁾; unter stufenweiser Erhöhung desselben werden T_P und T_U oberhalb des Drahtes als Funktion von J bestimmt.

Die Resultate der mit fünf teilweise verschieden starken Drähten ausgeführten Messungen werden durch die Tab. 1a—e und die Figg. 4a—e wiedergegeben.

Aus den Kurven ersieht man, daß bei unnachgeheiztem Meßdraht ein mehr oder minder großer Unterschied $T_U - T_P = \Delta_0$ zwischen der Draht- und der Umkehrtemperatur besteht; mit wachsender Stromstärke nimmt er ab. Am Schnittpunkt Σ der beiden Kurven wird schließlich für die Stromstärke $J = J$

$$T_U = T_P = \Sigma;$$

1) Die Drahtenden tauchten ganz lose in Quecksilbernäpfchen ein, die den Kontakt vermittelten; auf diese Weise wurde beim Einschalten des Stromes nichts an der Justierung des Drahtes geändert.

Tabelle 1a.

Drahtdicke d : 0,420 mm
Höhe über dem Brennerand
 h : 12 mm

J (Amp.)	T_P (°Cels.)	T_U (°Cels.)
0	1555	1602
1,60	1568	1619
2,20	1579	1634
2,80	1595	1643
3,44	1608	1650
4,20	1637	1668
4,55	1656	1692
5,50	1687	1704
6,00	1717	1715
6,90	1755	1734
7,36	1747	1748
		Umkehr- temperatur ohne Draht: 1773°

Tabelle 1b.

d : 0,430 mm
 h : 12 mm

J (Amp.)	T_P (°Cels.)	T_U (°Cels.)
0	1590	1633
1,60	1597	1643
2,20	1603	1648
2,78	1613	1667
3,40	1628	1670
4,24	1653	1681
4,85	1668	1690
5,50	1697	1702
6,00	1716	1722
6,60	1739	1738
7,20	1767	1754
7,50	1782	1765
		ohne Draht: 1779°

Tabelle 1c.

d : 0,398 mm
 h : 8,5 mm

J (Amp.)	T_P (°Cels.)	T_U (°Cels.)
0	1607	1637
2,03	1632	1654
2,95	1651	1669
3,40	1658	1673
4,00	1677	1685
4,50	1702	1705
5,00	1714	1714
5,50	1733	1727
5,80	1745	1741
		ohne Draht: 1767°

Tabelle 1d.

d : 0,845 mm
 h : 12 mm

J (Amp.)	T_P (°Cels.)	T_U (°Cels.)
0	1477	1538
5,00	1488	1551
9,65	1530	1580
13,24	1583	1620
16,00	1637	1665
17,70	1667	1692
19,20	1709	1718
20,00	1727	1735
21,00	1754	1745
22,70	1792	1774
		ohne Draht: 1777°

Tabelle 1e.

Drahtdicke d : 0,430 mm Höhe h : 15 mm

J (Amp.)	T_P (°Cels.)	T_U (°Cels.)
0	1565	1612
3,00	1594	1637
3,80	1612	1649
5,00	1658	1680
6,00	1692	1708
6,80	1725	1729
7,40	1754	1752
8,00	1777	1760
		ohne Draht: 1793°

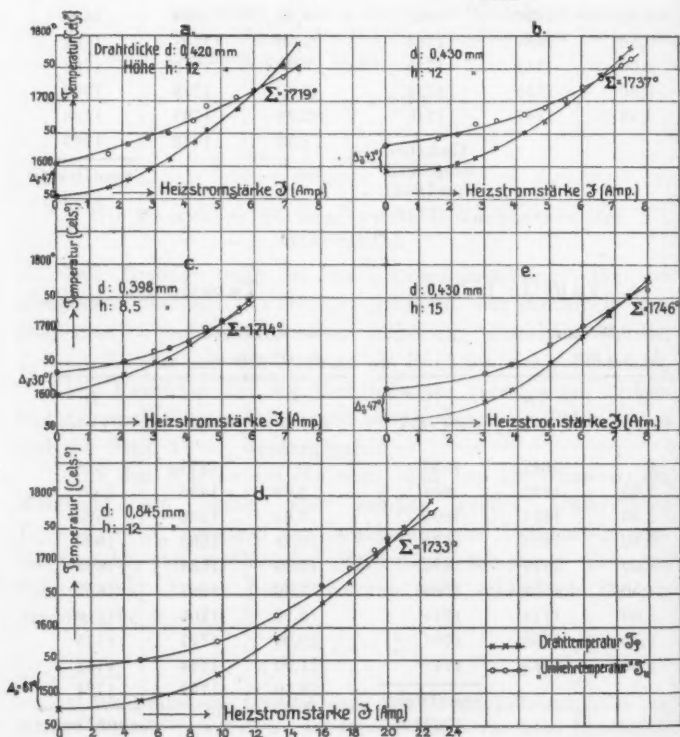


Fig. 4.

dann wächst T_P über T_U hinaus. Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Σ -Werten sind etwa von derselben Größenordnung wie die Änderungen der Umkehrtemperaturen T der „wirksamen Flammenzone“ ohne Draht.

Der anfängliche Unterschied Δ_0 könnte nun dadurch bewirkt sein, daß T_U nicht mit der wahren Flammentemperatur identisch, sondern größer als diese ist. Andererseits kann die Abkühlung durch den unnachgeheizten Draht bis zum Schwerpunkt der „wirksamen Flammenzone“ vielleicht schon um so viel nachgelassen haben, daß die wahre Temperatur daselbst in der Tat höher ist als unmittelbar am Draht; beim Strome $J = J$ müßte sie dann in der nächsten Umgebung des Drahtes so konstant sein, daß bis zum Schwerpunkt der „wirksamen Flammenzone“ kein merklicher Anstieg erfolgt. Hierüber sollen:

b) Die Messungen in der Umgebung des Drahtes entscheiden

α) Der Brenner wird in die „Ausgangsstellung“ für die Messungen oberhalb des Drahtes gebracht. Bei unnachge-

Umkehrtemperatur oberhalb des Meßdrahtes.

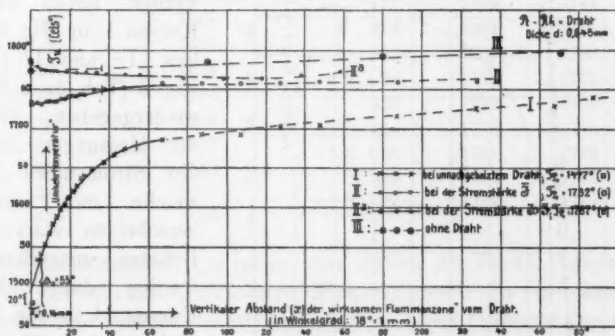


Fig. 5.

heiztem Draht und bei der Stromstärke J wird die Umkehrtemperatur T_U als Funktion des vertikalen Abstandes vom Draht bestimmt, indem der Brenner erst langsamer, dann schneller gesenkt wird.

β) Der Brenner wird in die „Ausgangsstellung“ für Messungen seitlich vom Draht gebracht und T_U bei unangeheiztem Draht

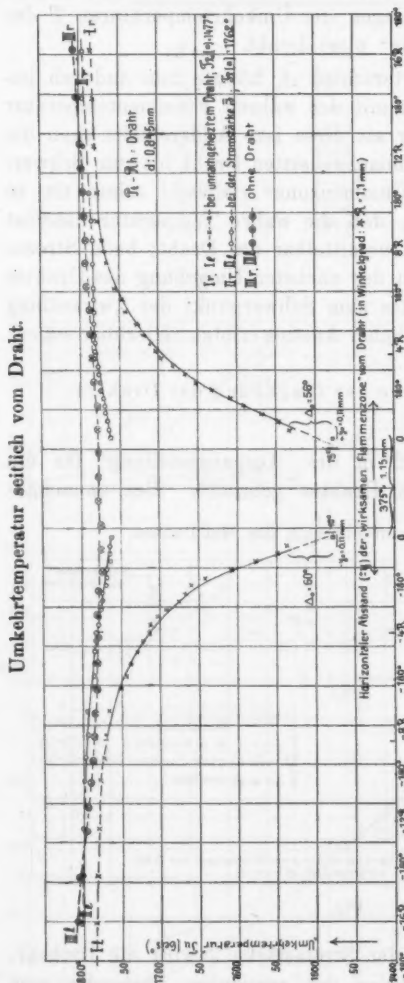


Tabelle 2a.

$d: 0,845 \text{ mm}$ $T_{P_0} = 1477^\circ$
 $h: 12 \text{ mm}$ $\Delta_0 = 55^\circ$

x (Winkelgrad)	T_U (° Cels.)
3 (x_0)	1532 (T_{U_0})
5	1539
7	1554
9	1566
11	1578
13	1587
15	1599
17	1604
19	1612
21	1619
23	1626
25	1635
27	1639
32	1648
37	1658
42	1669
47	1675
67	1686
87	1694
107	1694
127	1702
147	1705
187	1717
227	1725
267	1729
287	1738

Tabelle 2b.

$d: 0,845 \text{ mm}$ $T_{P_0} = 1477^\circ$
 $h: 12 \text{ mm}$ $(+) \Delta_0 = 56^\circ$
 $(-) \Delta_0 = 60^\circ$

$\pm y$ (Winkelgrad)	$T_U (+)$ (° Cels.)	$T_U (-)$ (° Cels.)
36 ($\pm y_0$)	1533 (T_{U_0})	1537 (T_{U_0})
66	1547	1549
96	1569	1577
126	1590	1607
156	1608	1640
186	1631	1660
216	1652	1666
246	1665	1675
276	1680	1692
306	1695	1703
336	1704	1714
4 R. + 6	1709	1714
36	1719	1721
81	1727	1728
126	1741	1737
171	1745	1744
216	1757	1751
306	1766	1766
8 R. + 36	1772	1772
126	1776	1774
216	1776	1778
12 R. + 36	1781	1779
216	1782	1782
16 R. + 36	1784	1784

für die Abszissen (\square) ist in allen Fällen der Berührungspunkt von Draht und „wirksamer Flammenzone“; die gleichzeitig gemessene wahre Drahttemperatur ist seine Ordinate, so daß Δ_0 die Ordinatendifferenz zwischen dem ersten beobachteten Flammenpunkt und dem Berührungspunkt von Draht und Flamme. x_0 , bzw. $\pm y_0$, der Abstand des Drahtes vom Schwerpunkt der „wirksamen Flammenzone“ in der „Ausgangsstellung“, ist die Abszisse des ersten beobachteten Flammenpunktes. Der Abstand zwischen den beiden Abszissenanfangs-

Tabelle 3a.

Drahtdicke d : 0,845 mmHöhe h : 12 mm $\bar{J} = 20,2$ Amp. $\Sigma = T_P = 1732^\circ$

α (Winkelgrad)	T_U (° Cels.)	α (Winkelgrad)	T_U (° Cels.)
3 (α_0)	1731 (Σ)	27	1741
5	1730	32	1748
7	1732	37	1748
9	1735	42	1749
11	1734	47	1751
13	1734	67	1757
15	1736	87	1757
17	1737	107	1757
19	1740	127	1757
21	1741	147	1759
23	1740	187	1759
25	1742	227	1759

Umkehrtemperatur oberhalb des Meßdrahtes.

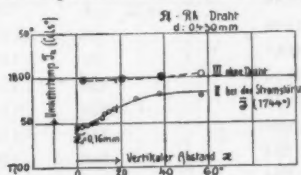


Fig. 7.

Umkehrtemperatur seitlich vom Draht.

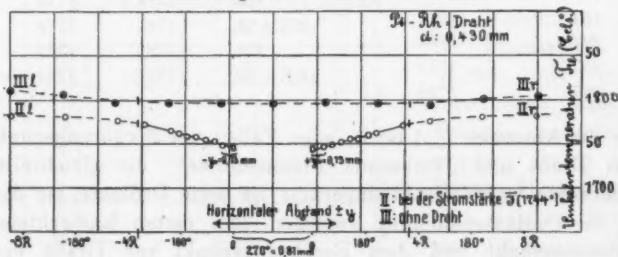


Fig. 8.

punkten (\square) der Kurven r und l wird durch die Verschiebung des Brenners bestimmt, welche erforderlich ist, um von der einen Seite des Drahtes auf die andere Seite zu gelangen.

Tabelle 3b.

Drahtdicke d : 0,845 mm
Höhe h : 12 mm

$\bar{J} = 21,2$ Amp.
 $\Sigma = T_P = 1762^\circ$

$\pm y$ (Winkelgrad)	$T_U (+)$ (° Cels.)	$T_U (-)$ (° Cels.)
36 ($\pm y_0$)	1764 (Σ)	1764 (Σ)
66	1765	1764
96	1769	1763
126	1769	1768
156	1770	1768
186	1774	1769
216	1775	1774
246	1775	1774
276	1777	1775
306	1780	1778
336	1782	1779
4 R. + 6	1781	1782
36	1782	1782
81	1782	1784
126	1783	1784
171	1783	1785
216	1783	1786
306	1783	1788
8 R. + 36	1783	1793
216	1788	1798
12 R. + 36	1795	1800
216	1795	1800
16 R. + 36	1798	1802

Die Kurven I zeigen in der Tat, daß in der Nähe des unnachgeheizten Drahtes ein sehr rasches Anwachsen von T_U stattfindet. Von geringen Abweichungen abgesehen verlaufen sie geradlinig. Verlängert man sie bis zum Schnittpunkt mit der Ordinatenachse, so erhält man nun die nur noch sehr geringe Differenz zwischen T_U und T_P am Draht selbst.

Es ist in:

Messung $\alpha)$
 $\Delta = 20^\circ$

$\beta)$
 $\left\{ \begin{array}{l} 15^\circ \\ 10^\circ \end{array} \right.$

Diesen geringen Abweichungen wird kaum noch eine Bedeutung beizumessen sein, zumal, wenn man berücksichtigt,

daß für den Abstand x_0 , bzw. $\pm y_0$ die kleinsten Werte eingesetzt wurden. In der Kurve I z. B., bei der $\Delta = 15^\circ$ ist, brauchte y_0 nur um $30^\circ = 0,09$ mm, also von 0,11 auf 0,20 mm erhöht zu werden, damit $\Delta = 0$ wird. Wenn der Draht nur einen Winkel von $0,5^\circ$ gegen die Richtung des Strahlenganges bildet, wächst der Wert von y_0 bereits um 0,25 mm.

In der Entfernung von 3 bzw. 2 mm vom Draht findet nur noch ein ganz allmähliches Ansteigen der Temperatur T_U statt.

Die bei der Stromstärke J erhaltenen Kurven II dagegen sind anfangs gerade Linien von sehr geringer Neigung, die verlängert mit einer Abweichung von höchstens $\pm 5^\circ$ durch den Anfangspunkt (\square) gehen, also besagen, daß am Draht selbst:

$$T_U = T_P \pm 5^\circ, \text{ d. h.}$$

$$T_U = \text{der wahren Flammentemperatur} \pm 5^\circ \text{ ist.}$$

Unter der anfänglichen Neigung steigen die Kurven II noch 1—2 mm weit an, wobei T_U um $20\text{--}25^\circ$ wächst; von da ab wird der Abstand zwischen den Kurven I und II immer geringer.

Es wurde nun noch eine Messung oberhalb des dicken Drahtes bei einem Heizstrom J , für welchen in der Ausgangsstellung $T_P > T_U$ war (um 12°) ausgeführt. Wie die Kurve IIa, Fig. 5 zeigt, sinkt mit wachsendem Abstand vom Draht T_U noch weiter unter T_P , um dann wieder zu steigen. Durch Verlängern der Kurve folgt am Draht selbst:

$$T_U = T_P - 8^\circ.$$

Die bisher besprochenen Messungen zeigen also, daß die *Umkehrtemperatur mit der wahren Temperatur des in der Flamme leuchtenden Dampfes identisch ist*, und zwar in einem Intervall von etwa $1500\text{--}1800^\circ$ C. und mit einer Genauigkeit von mindestens $\pm 10^\circ$.

e) Die Temperaturverteilung in der Flamme.

Die bisher besprochenen Messungen klären uns über die wahre Temperatur der Flamme *ohne Draht* noch nicht auf; der Verlauf der verschiedenen Kurven nahe am Draht spricht

dafür, daß durch den Strom $J = J$ dem Draht die durch Strahlung verlorene Energie ersetzt wird, und daher $T_U = T_P = \Sigma$, nach dem Schmidtschen Gedankengang, die Temperatur der Flamme ohne Draht ist. Jedoch wächst, wie die Kurven II zeigen, beim Strome $J = J$ in gewissem Abstand vom Draht die Umkehrtemperatur noch ganz erheblich; auch beim Strome $J > J$ steigt sie nach kleinem Abfall wiederum an. Mit diesen Beobachtungen könnte die Annahme, daß Σ die wahre Flammentemperatur liefert, nur vereinbar sein, wenn die nach den Messungen von Schmidt und Bauer bekannte Temperaturinhomogenität der Flamme quantitativ denselben Verlauf hätte. Um dies festzustellen, entfernte ich den Draht aus der Flamme und bestimmte

α) die Umkehrtemperatur T_U als Funktion des vertikalen Abstandes x der „wirksamen Flammenzone“ vom Brennerrand (Fig. 9),

β) den Verlauf von T_U längs der kürzeren Mittellinie (2 cm) des Flammenquerschnittes, also senkrecht zu der Richtung des

Drahtes, in demselben Horizontalschnitt, in dem bei den vorangegangenen Messungen der Draht lag; und zwar in Abständen von je 0,55 mm von der langen Mittellinie ($y = 0$) des Flammenquerschnittes, wofür natürlich immer andere schmale Flammenzonen zu färben waren. Die graphische Darstellung der Temperaturverteilung ist bereits durch Fig. 1 (p. 754) gegeben. Die Form der Kurve ist sehr ähnlich wie bei E. Bauer und bei H. Schmidt. Jedoch beträgt der Unterschied zwischen dem Maximum im Flammensaum und dem Minimum in der Mitte nur 75° , bei Bauer und bei Schmidt $150-200^\circ$. Die Größe dieser Differenz hängt von der Zusammensetzung des Gas-Luftgemisches und der Ausströmungsgeschwindigkeit desselben ab, welche durch die Brennerform und den Gasdruck bedingt sind.

Die Teile der Kurven, welche für den Vergleich mit den bei Anwesenheit des Drahtes gewonnenen Umkehrtemperaturen

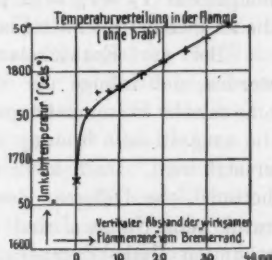


Fig. 9.

interessieren, sind als die Kurven III, bzw. III r und l in die Figg. 5 u. 7 bzw. 6 u. 8 eingetragen.

Sämtliche Kurven III zeigen, daß bei der Stromstärke J in der Nachbarschaft des Drahtes T_U kleiner ist als an den gleichen Flammenorten, wenn der Draht entfernt wird. Dieser Unterschied nimmt in größerer Entfernung vom Draht ab und erreicht schließlich einen konstanten Wert. Auch für den Heizstrom $J > J$ (Kurve IIa, Fig. 5) bleiben schließlich die Werte T_U kleiner als die entsprechenden Umkehrtemperaturen, wenn der Draht aus der Flamme entfernt wird.

Hiernach kann die zur Stromstärke J gehörige Drahttemperatur $T_P = T_U = \Sigma$ jedenfalls nicht die Temperatur sein, die an dem betreffenden Flammenort *ohne Draht* herrschen würde.

Bei der Entwicklung der Methode (§ 2) war gezeigt worden, daß infolge der Wärmeleitung der Draht auch dann eine falsche Flammentemperatur vortäuschen könnte, wenn ihm die ausgestrahlte Energie durch elektrisches Nachheizen gerade ersetzt wird. Doch kann dies nicht der einzige Grund für die beträchtliche Differenz der gleichen Draht- und Umkehrtemperatur beim Strome J und der ohne Draht in der Flamme bestimmten Umkehrtemperatur sein. Ich glaube vielmehr, wie auch Schmidt in Erwägung gezogen hat¹⁾, daß die Vorgänge in der Flamme durch die bloße Anwesenheit des Meßdrahtes gestört werden. Die in die Höhe steigenden Gase brechen sich am Draht, wodurch ihre Geschwindigkeit verringert wird. Die Schmidtsche Methode würde dann die Temperatur der durch den Draht gestörten Flamme liefern.

Bisher wurde jedoch nur aus dem Temperaturgleichgewicht in der nächsten Umgebung des Drahtes beim Strome J geschlossen, daß Σ mit der nach der Schmidtschen Methode gewonnenen Flammentemperatur identisch ist. Um den exakten Vergleich zwischen dieser letzteren und der Umkehrtemperatur der Flamme *ohne Draht* vornehmen zu können, die ja nach den Resultaten der vorangegangenen Messungen als die wahre Flammentemperatur zu bezeichnen ist, habe ich auch noch die Temperaturbestimmung nach der Schmidtschen Methode ausgeführt.

1) H. Schmidt, l. c. p. 27.

§ 5. Bestimmung der wahren Flammentemperatur nach der Schmidtschen Methode.

Diese Temperaturbestimmung erfordert:

a) Die Aufnahme der sog. „Ausstrahlungskurve“, welche die von der Längeneinheit eines horizontal ausgespannten, elektrisch geglühten Drahtes ausgestrahlte Energie E in absolutem Maß (Watt) als Funktion der gleichzeitig im Pyrometer ermittelten Drahttemperatur T_P darstellt; bei der Aufnahme dieser Kurve ist auch der Drahtwiderstand w (pro Zentimeter) aus Stromstärke J und Spannung V an den Enden des Drahtstückes L als Funktion der Temperatur zu bestimmen.

b) Die Aufnahme der sog. „Flammenkurve“. Diese stellt die Energie E , welche dem in der Flamme glühenden Draht pro Zentimeter elektrisch zugeführt wird und aus Stromstärke und Widerstand zu berechnen ist, als Funktion der wiederum gleichzeitig im Pyrometer gemessenen Temperatur T_P dar. Der Schnittpunkt dieser beiden Kurven liefert die Temperatur der Flamme.

a) Die Aufnahme der „Ausstrahlungskurve“ erfolgte im wesentlichen nach der von Schmidt angegebenen Methode. Die von dem elektrisch geglühten Draht ausgestrahlte Energie wurde mit einer Rubensschen Thermosäule gemessen, deren Thermostrom durch ein spannungsempfindliches Deprez-D'Arsonval-Galvanometer geführt wurde. Diese Apparatur wurde, wie bei Schmidt¹⁾, vor der Strahlungsmessung in Watt mittels eines schwarzen Körpers von 100° geeicht. Einem Ausschlag von 1 Sk.-Teil entsprach die Energie von 0,0186 Watt (pro Zentimeter).

Die „Ausstrahlungskurven“ wurden mit den beiden Platin-rhodiumdrähten von 0,430 und 0,845 mm Dicke, welche für alle die in § 4 beschriebenen Untersuchungen dienten, aufgenommen. Die Resultate werden durch die Kurven I in Figg. 10 u. 11 (Tabb. 4 u. 5)²⁾ graphisch dargestellt.

1) H. Schmidt, l. c. p. 6—9.

2) Die aus den Absolutwerten der von den Drähten ausgestrahlten Energien berechnete Strahlungskonstante des Platins stimmt bis auf 1 Proz. mit dem Wert überein, der sich aus den Lummer-Kurlbaumschen und speziell aus den neuesten Lummerschen Messungen ergibt. O. Lummer und F. Kurlbaum, Sitzungsber. d. Phys. Ges. z. Berlin 17. p. 106. 1898; O. Lummer Sitzungsber. d. Schles. Ges. f. vaterl. Kultur 1913 (vgl. d. Diss. d. Verf. p. 64. 65).

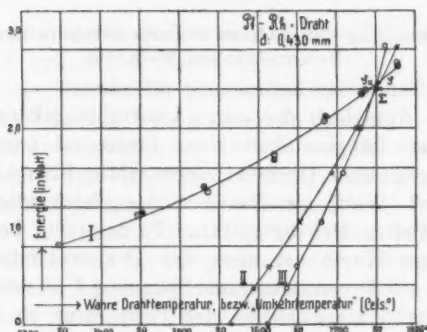


Fig. 10.

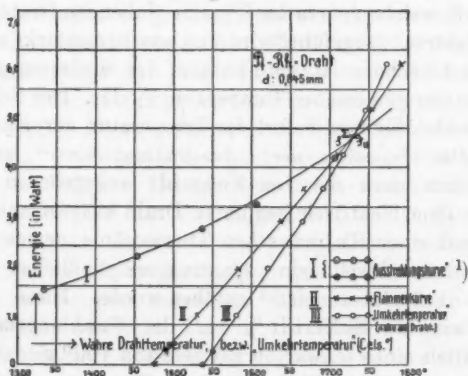


Fig. 11.

Tabelle 4.

Drahtdicke d : 0,430 mm.

J (Amp.)	V (Volt)	L (cm)	w (Ω)	T_p (° Cels.) (abs.)	Sk. (Sk.-T.)	E (Watt)
10,00	4,36	13,27	0,03549	1347—1620	43,4	0,805
10,70	4,96	13,28	0,03779	1449—1722	61,0	1,132
11,30	5,46	13,29	0,03942	1536—1809	74,2	1,377
11,90	5,98	13,30	0,04103	1621—1894	93,1	1,728
12,40	6,38	13,31	0,04229	1685—1958	111,8	2,075
12,70	6,72	13,32	0,04343	1737—2010	129,3	2,381
12,95	7,02	13,33	0,04431	1779—2052	143,5	2,663

1) Die durch \otimes gekennzeichneten Punkte der „Ausstrahlungskurve“ in Fig. 10 sind bei einer 2. Strahlungsmessung, die nach Aufnahme der „Flammenkurve“ ausgeführt wurde, gewonnen.

Tabelle 5.

Drahtdicke d : 0,845 mm.

J	V	L	w	T_P	Sk.-T.	E
23,0	2,83	13,47	0,00993	1335—1608°	82,6	1,533
25,2	3,28	13,48	0,01044	1454—1727	118,2	2,194
26,4	3,52	13,50	0,01079	1537—1810	146,8	2,724
28,0	3,86	13,51	0,01107	1607—1880	174,8	3,244
29,8	4,28	13,52	0,01153	1707—1980	226,0	4,194

b) Zur Konstruktion der „Flammenkurven“ dienten die bei den Messungen a) § 4 gefundenen Werte, (vgl. Tab. 1 d, e, Fig. 4 d, e). Aus der Stromstärke J des Drahtes und dem bei Gelegenheit der Strahlungsmessungen ermittelten Drahtwiderstand w (pro Zentimeter) wurde nun die dem Draht elektrisch zugeführte Energie E in Watt berechnet und in einer Kurve als Funktion der Drahttemperatur T_P , gleichzeitig auch in einer zweiten Kurve als Funktion der Umkehrtemperatur T_U dargestellt. Erstere ist die Schmidtsche „Flammenkurve“. Letztere muß bei der Stromstärke J oder der entsprechenden Energie \bar{E} nach dem Vorangegangenen mit ihr identisch sein.

In den Tab. 6 u. 7 sind die Größen T_P , T_U , J , w und E zusammengestellt. Die graphische Darstellung von E als Funktion von T_P , bzw. T_U erfolgt in den Kurven II und III der Figg. 10 u. 11.

Tabelle 6.

Drahtdicke d : 0,430 mm.Höhe h : 15 mm.

T_P (° Cels.)	T_U (° Cels.)	J (Amp.)	w (Ω)	E (Watt)
1565	1612	0	—	0
1594	1637	3,00	0,04050	0,364
1612	1649	3,80	0,04085	0,592
1653	1680	5,00	0,04175	1,044
1692	1708	6,00	0,04250	1,534
1725	1729	6,80	0,04320	1,998
1754	1752	7,40	0,04382	2,400
1777	1760	8,00	0,04430	2,835

Tabelle 7.
 Drahtdicke d : 0,845 mm.
 Höhe h : 12 mm.

T_P (° Cels.)	T_U (° Cels.)	J (Amp.)	w (Ω)	E (Watt)
1477	1598	0	—	0
1488	1551	5,00	0,01057	0,264
1590	1580	9,65	0,01075	0,978
1583	1620	13,24	0,01098	1,925
1637	1665	16,00	0,01122	2,872
1667	1692	17,70	0,01135	3,556
1709	1718	19,20	0,01153	4,251
1727	1735	20,00	0,01161	4,644
1754	1745	21,00	0,01172	5,168
1792	1774	22,70	0,01191	6,137

In diesen Figuren betrachten wir nun: den Schnittpunkt Σ der Kurven II und III, an welchem $T_U = T_P = \Sigma$ für eine bestimmte zugeführte Energie \bar{E} (früher Stromstärke \bar{J}), den Schnittpunkt S der Kurven I und II, der nach der Schmidt'schen Methode die wahre Flammentemperatur S liefert, die bei der Drahttemperatur S dicht am Draht gemessene Umkehrtemperatur S_U , die der Kurve III zu entnehmen ist, und schließlich die nach Entfernung des Drahtes am gleichen Flammenort, d. h. im Mittelpunkt eines Flammenquerschnittes bestimmte Umkehrtemperatur T . Tab. 8 zeigt die Resultate:

Tabelle 8.

Drahtdicke	0,430 mm	0,845 mm
Höhe der beobachteten Zone über dem Brenner	15 mm	12 mm
Σ	1746°	1733°
S	1756	1726
S_U	1752	1729
$\Sigma - S$	-10	+7
T	1798	1777

Die Differenz $\Sigma - S$ ist so minimal, daß man die Temperaturen Σ und S innerhalb der Fehlergrenzen als identisch bezeichnen muß. Hierfür spricht auch der überaus geringe Unterschied zwischen S und S_U , welcher zeigt, daß am Punkte S

ebenso wie am Punkte Σ vom Draht bis zum Schwerpunkt der berührenden „wirksamen Flammenzone“ noch keine merkliche Temperaturänderung stattgefunden hat.

Da Σ (oder S_D), als Umkehrtemperatur aufgefaßt, die wahre Temperatur der Flamme *mit Draht* an dem beobachteten Flammenort liefert, so gilt in der Tat das gleiche für die Drahttemperaturen Σ und S . Die Ungenauigkeit, die der Schmidtschen Temperaturbestimmung infolge der Wärmeleitung des Drahtes anhaften könnte, liegt im Mittelpunkt der Flamme, also jedenfalls innerhalb der Fehlergrenzen.

Von der Bedeutung des Punktes Σ ganz abgesehen, ergibt sich, daß die im Mittelpunkt eines bestimmten Horizontalschnittes der Flamme bei Anwesenheit des Drahtes gemessene Umkehrtemperatur bis auf 4° mit der nach der Schmidtschen Methode ermittelten wahren Temperatur der Flamme übereinstimmt.

Ein wesentlicher Unterschied besteht nun aber zwischen den Temperaturen S ($= \Sigma = S_D$) und der im Mittelpunkt der Flamme nach Entfernung des Drahtes durch Umkehr bestimmten Temperatur T . Nach § 4 ist T die wahre Flammentemperatur; diese ist also *mit* und *ohne* Draht verschieden; bei dem dünnen Draht beträgt der Unterschied 37° , bei dem dickeren 51° . Diesen Unterschied möchte ich also auf eine Störung der Flamme durch den Draht zurückführen. Aus den Kurven in den Figg. 5—8 geht hervor, daß sie oberhalb und seitlich vom Draht nachläßt, und zwar oberhalb langsamer als seitlich, bei dem dünnen Draht schneller als bei dem dicken, jedoch auch in größerer Entfernung vom Draht nicht ganz aufhört.

Nach der Schmidtschen Methode bestimmt man also die durch Anwesenheit des Drahtes etwas *erniedrigte* Flammentemperatur, während nach der Methode der Linienumkehr keine Änderung der Flammentemperatur durch ein Meßinstrument erfolgt.

Bei der Beantwortung der in der vorliegenden Arbeit gestellten Frage kam es auf eine Änderung der eigentlichen Flammentemperatur durch das Meßinstrument nicht an. Wir wollten ja nur die wahre Temperatur des Dampfes kennen in derselben Beschaffenheit, in der auch seine Strahlungs eigen-

schaften untersucht wurden. Diese liefert ein in den Dampf eingeführter fester Körper, mit welchem er sich wie in einem abgeschlossenen Raum im Temperaturgleichgewicht befinden muß. Wann dies der Fall ist, und daß dann in der Tat in einem gewissen, den Draht umgebenden Volumen Temperaturgleichgewicht herrscht, wird durch die in § 4 beschriebenen Messungen, auch ohne Zuhilfenahme der absoluten Strahlungsmessung, ermittelt.

c) Abhängigkeit der Resultate von der zugrunde gelegten Temperaturskala und den Strahlungskonstanten.

Es wurde darauf hingewiesen, daß der Bestimmung der Umkehr- wie der Drahttemperatur die gleiche Temperaturskala zugrunde liegt, nämlich die Eichkurve des optischen Pyrometers, die ihrerseits auf den Temperaturen beruht, welche das im schwarzen Körper befindliche Thermoelement angibt. Der Eichung des Thermoelements liegt die Holborn-Daysche Temperaturskala¹⁾ zugrunde, welche in höheren Temperaturgebieten zu Werten führt, die im Vergleich mit den neuesten gasthermometrischen und Strahlungsmessungen²⁾ zu klein ausfallen, am Palladiumschmelzpunkt (1550° C.) um 15–20°. Der Übergang von der alten zur neuen Temperaturskala ergibt zwar, wie die folgenden Tabellen zeigen, eine Änderung der Absolutwerte der verschiedenen Temperaturen:

nach der neuen Skala	nach der alten Skala
$\Sigma = 1771^{\circ}$	$\Sigma = 1746^{\circ}$
$S = 1776$	$S = 1756$
$S_U = 1772$	$S_U = 1752$
$T = 1814$	$T = 1793$

Die Übereinstimmung zwischen den Temperaturen Σ , S und S_U bleibt aber erhalten, ebenso das wichtigste Resultat der vorliegenden Messungen, daß bei der Temperatur Σ die Umkehrtemperatur in der Umgebung des Drahtes annähernd konstant ist.

Die Temperatur Σ , die mit S und S_U bis auf $\pm 10^{\circ}$ identisch ist, ist von den für die Strahlungskonstanten eingeführten

1) L. Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68. p. 817. 1899, und Ann. d. Phys. 2. p. 505. 1900.

2) Vgl. Warburg, Leithäuser, Hupka u. Müller, Berl. Ber. 2. p. 35–43. 1913, auch Ann. d. Phys. 40. p. 609. 1913.

Werten unabhängig. Dagegen ist auf die Schmidtsche Temperaturbestimmung, also auf die Temperaturen S und S_U , der für die Konstante σ des Stefan-Boltzmannschen Gesetzes eingeführte Wert von Einfluß, da er in die Berechnung des absoluten Wertes der vom Draht ausgestrahlten Energie eingeht. Meinen Resultaten liegt der Kurlbaumsche Wert $\sigma = 5,32 \cdot 10^{-12}$ ¹⁾ zugrunde. Benutzt man die neue Temperaturskala, welche zu dem Wert $c_2 = 14370$ der Konstanten des Wienschen Gesetzes führt, so ist für σ der Wert $5,58 \cdot 10^{-12}$ zu gebrauchen ²⁾; er führt zu den Temperaturen $S = 1785^\circ$ und $S_U = 1775^\circ$; auch für diesen Fall ist die Übereinstimmung zwischen den Temperaturen Σ , S und S_U (14°) befriedigend.

§ 6. Gekühlte und „kalte“ Flammen.

Von besonderem Interesse war die Untersuchung der Emissionsursachen in kälteren Flammen. Pringsheim hat festgestellt, daß Flammen bei einer Temperatur von 150°C. ³⁾ noch Licht emittieren können, was die Vermutung nahelegt, daß bei niedrigen Temperaturen die Erregung der Emissionszentren vielleicht allgemein zum Teil auf chemische Vorgänge zurückzuführen ist.

a) Gekühlte Flammen.

Durch Verringern des Primärluftgehalts der Bec Mékerflamme und gleichzeitiges Beimischen von Kohlensäure ⁴⁾ zu dem Leuchtgas konnte ich in kontinuierlicher Aufeinanderfolge Flammen herstellen, in welchen der unnachgeheizte dicke (0,840 mm) Platinrhodiumdraht Temperaturen von $1500-900^\circ \text{C.}$

1) F. Kurlbaum, Wied. Ann. 65. 1898.

2) Vgl. hierüber die von S. Valentiner, Ann. d. Phys. 31. p. 275. 1912 aufgestellte Tabelle der zusammengehörigen Werte von c_2 , σ und dem Elementarquantum. Der Wert $\sigma = 5,58$ ist der von Valentiner korrigierte. Mit ihm stimmt der von W. Westphal, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 14. p. 987. 1912 ermittelte, $\sigma = 5,54 \cdot 10^{-12}$, vollkommen überein.

3) E. Pringsheim, l. c. p. 437. 1892.

4) Durch die Kohlensäure wurde die Flamme in gleicher Weise wie durch Luft entleuchtet, auch wurde der Innenkegel auf den Brennerrost herabgedrückt. Die dem geringeren Primärluftgehalt entsprechende niedrigere Temperatur der Flamme aber wurde nicht erhöht.

annahm, und in welchen nun die gleichzeitige Bestimmung der wahren und der Umkehrtemperatur erfolgte.

In einer ersten Messungsreihe wurde bei allmählich sinkender Flammentemperatur gleichzeitig die Temperatur T_P des un-nachgeheizten Drahtes und die Umkehrtemperatur T_U einer unmittelbar angrenzenden Flammenzone gemessen. Es besteht auch hier wie bei den heißen Flammen eine Differenz $\Delta_0 = T_{U_0} - T_{P_0}$, deren Größe durch den Abstand des Schwerpunktes der „wirksamen Flammenzone“ vom Draht bedingt ist. In Tab. 9 sind die Ergebnisse zweier Messungsreihen zusammengestellt, innerhalb derer die Flamme nicht ausgelöscht, und der Draht nicht verrückt wurde. Die Differenz Δ_0 variiert bis zu den tiefsten Temperaturen herab, also bis etwa 950°C. , nur innerhalb der Fehlergrenzen (10°) und ist von derselben Größenordnung wie bei hohen Temperaturen.

Tabelle 9.

Drahtdicke d : 0,840 mm.

T_{P_0} (° Cels.)	T_{U_0} (° Cels.)	$\Delta_0 = T_{U_0} - T_{P_0}$	T_{P_0} (° Cels.)	T_{U_0} (° Cels.)	$\Delta_0 = T_{U_0} - T_{P_0}$
1445	1501	56	1202	1267	65
1376	1431	55	1145	1211	66
1202	1267	65	1061	1124	63
1102	1170	68	1140	1198	58
1055	1127	72	973	1024	51
1026	1095	69	954	997	43
			916	975	59
			904	965	61

In einer der abgekühlten Flammen wurde auch das allmähliche elektrische Nachheizen des Meßdrahtes vorgenommen, um zu dem Punkt zu gelangen, in welchem Temperaturgleichgewicht herrscht, also bei reiner Temperaturstrahlung die Umkehrtemperatur in der Umgebung des Drahtes mit der Drahttemperatur übereinstimmen muß.

In den Kurven der Fig. 12 werden die bei verschiedenen Heizstromstärken J gemessenen Drahttemperaturen T_P und die gleichzeitig dicht oberhalb des Drahtes ermittelten

Umkehrtemperaturen T_U als Funktion von J dargestellt. Am Schnittpunkt Σ , für $J = J$ ist:

$$T_U = T_P = \Sigma = 1230^\circ \text{ C.}$$

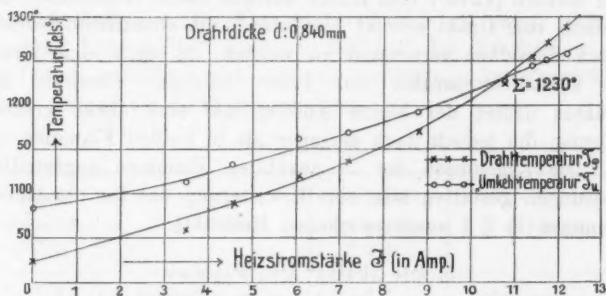


Fig. 12.

Beim Strome $J = J$ wurde nun in derselben Weise wie bei den Messungen in § 4 die Umkehrtemperatur als Funktion des vertikalen und horizontalen Abstandes der „wirksamen Flammenzone“ vom Draht ermittelt. Die Resultate werden durch die Figg. 13 u. 14 in derselben Weise wie für die entsprechenden Messungen in heißen Flammen graphisch dargestellt.

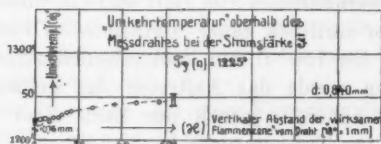


Fig. 13.



Fig. 14.

Aus den Kurven ist zu ersehen, daß am Punkte Σ die Umkehrtemperatur dicht oberhalb des Drahtes (1 mm weit) mit der Drahttemperatur übereinstimmt, dann noch im ganzen

etwa um 20° ansteigt. Seitlich vom Draht besteht 2 mm weit vollkommene Übereinstimmung zwischen Draht- und Umkehrtemperatur. Die Werte der Temperatur Σ oberhalb (1225°) und seitlich (1249°) vom Draht weichen etwas voneinander ab. Seitlich vom Draht scheint hier also keine wesentliche Störung durch denselben verursacht zu werden, da auch ohne Draht die Umkehrtemperatur nur 1260° beträgt. Oberhalb des Drahtes deutet der kleine Anstieg auf eine etwas größere Störung, die jedoch auch geringer als in heißen Flammen ist.

Die Ergebnisse der in gekühlten Flammen angestellten Messungen gestatten also eine Erweiterung des für die heißen Flammen in § 4 ausgesprochenen Resultats.

b) Die „kalte“ CS_2 -Flamme.

Leider gelang es nicht, durch Einführen von Kohlensäure die Temperatur der Leuchtgasflamme bis unter die Grenze herabzudrücken, bei welcher der Natriumdampf als Temperaturstrahler zuletzt sichtbares Licht emittieren würde. Erst dann hätten wir es mit einer „kalten“ Flamme in der von Pringsheim eingeführten Bedeutung des Wortes zu tun. Eine solche ist die von Pringsheim¹⁾ untersuchte Schwefelkohlenstoffflamme, deren Temperatur man durch geeignete Änderung des Mischungsverhältnisses von Luft und CS_2 innerhalb äußerst weiter Grenzen variieren kann. Pringsheim stellte fest, daß diese Flamme bei 150°C . ein kontinuierliches Spektrum emittiert. Dagegen wurde das Auftreten des gelben Na-Lichtes erst bei weit höheren, jedoch nur nach einer willkürlichen Skala ermittelten Temperaturen beobachtet.

Um diese zu messen, wurde nun ein Platindraht in die Flamme eingeführt, und seine wahre Temperatur im optischen Pyrometer bestimmt, während gleichzeitig ein zweiter Beobachter²⁾ durch ein sehr lichtstarkes Taschenspektroskop hindurch in einer dicht über dem Meßdraht liegenden Flammenzone auf das Erscheinen und Verschwinden der D -Linien achtete.

In der Tab. 10 habe ich eine Reihe in kontinuierlicher Folge durch Variation des CS_2 -Luftgemisches hergestellte

1) E. Pringsheim, l. c. 1892.

2) Herr cand. phil. Lorenz war mir hierbei in freundlicher Weise behilflich, wofür ich ihm auch an dieser Stelle meinen besten Dank sage.

Drahttemperaturen verzeichnet, bei welchen auf das „Vorhandensein“ oder „Nichtvorhandensein“ der *D*-Linien im Spektroskop geachtet wurde. Das Verschwinden und Wiederauftauchen derselben tritt hiernach etwa bei 670° C. ein, also erst oberhalb der für Temperaturstrahler geltenden unteren Grenze. Die „kalte“ Flamme, bei der das Erscheinen der Na-Linien unbedingt auf Lumineszenzvorgänge zurückzuführen wäre, vermag sie nicht zu erzeugen.

Tabelle 10.

Draht- temperatur (° Cels.)	<i>D</i> -Linien	Draht- temperatur (° Cels.)	<i>D</i> -Linien
789	vorhanden	717	vorhanden
769	„	692	„
696	„	663	nicht vorhanden
700	„	685	ganz schwach
663	nicht vorhanden	692	vorhanden
684	„	707	„
725	vorhanden	692	„

Zusammenfassung der Ergebnisse.

I. Durch *relative* Messungen wird nachgewiesen, daß die durch „Umkehr“ der Spektrallinien gewonnene sog. *Umkehrtemperatur* der in Flammen leuchtenden Alkalimetaldämpfe innerhalb 5—8° unabhängig ist

1. von der *Dispersion*, bei einer Variation des Dispersionswinkels im Verhältnis von 1:12;

2. von der *Dichte des leuchtenden Dampfes*, bei einer Variation der Dampfdichte im Verhältnis von 1:2000;

3. von der *Art des in die Flamme eingeführten Salzes*, falls durch dieses nur eine eng begrenzte Flammenzone von annähernd konstanter Temperatur gefärbt wird.

II. Durch *absolute* gleichzeitige Messung der *wahren Temperatur* und der *Umkehrtemperatur* der in der Flamme leuchtenden Alkalimetaldämpfe an einem gegebenen Flammenort wird in einem Intervall von 900—1800° C. die *Identität beider nachgewiesen*, und zwar mit einer Genauigkeit von mindestens $\pm 10^\circ$. Die gefundene Übereinstimmung ist in weitem Maße von den

für die Strahlungskonstanten eingeführten Werten unabhängig. Im Intervall von $900-1800^{\circ}\text{C}$. gehorchen somit die in der Flamme leuchtenden Alkalimetалldämpfe dem Kirchhoffschen Gesetz und sind daher als reine Temperaturstrahler zu betrachten.

Nach der Umkehrmethode wird daher auch die wahre Temperatur einer Flamme in einwandfreier Weise gemessen.

In der „kalten“ Schwefelkohlenstoffflamme ist die Lichtemission der Metалldämpfe erst bei etwa 670°C . wahrzunehmen, also oberhalb der Temperaturgrenze, bei der feste (schwarze) Körper sichtbares Licht zu emittieren beginnen.

Zum Schluß sei mir gestattet, meinen verehrten Lehrern, Hrn. Geheimrat Lummer und Hrn. Prof. Pringsheim, für die Anregung zu der Arbeit, wie für die stete wohlwollende Förderung derselben meinen aufrichtigen Dank auszusprechen.

Zu großem Dank fühle ich mich Hrn. Privatdozenten Dr. R. Ladenburg verpflichtet, der mich bei der Entwicklung der Methoden wie bei der Durchführung jederzeit in freundlicher und interessierter Weise beraten hat.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 11. März 1914.)

**4. Die durch Deformation hervorgerufenen
Thermokräfte und ihre Benutzung zur Messung
der elastischen Hysteresis;
von K. Baedeker und W. Vehrighs.**

Unter *akzidentellen* Thermokräften seien im folgenden solche verstanden, die in an sich homogenem und isotropem Material durch mechanische Beanspruchung entstehen. Die Messung solcher Kräfte, die zuerst von Kelvin¹⁾ und seitdem wiederholt²⁾ ausgeführt worden ist, wurde von uns von zwei Gesichtspunkten aus unternommen. Erstens liefert sie, wenn man sich auf das Bereich rein elastischer Deformationen beschränkt, für jedes Material neue charakteristische Konstanten, zwei an der Zahl (Teil I dieser Arbeit). Zweitens führt sie, wenn man zu beliebig großen, nicht mehr elastischen Deformationen übergeht, zur Kenntnis einiger allgemeiner Gesetzmäßigkeiten, über die als elastische Hysteresis und als „Fließen“ bezeichneten Erscheinungen (Teil II dieser Arbeit). Die Größe der akzidentellen Thermokraft, die im elastischen Bereich im allgemeinen proportional mit der Spannung gefunden wird, läßt sich nämlich auch außerhalb dieses Bereichs noch ansehen als ein *Maß der durch die Deformation entstandenen Anisotropie* der inneren Struktur. Sie mißt diese akzidentelle Anisotropie sogar sehr vollkommen, da thermoelektrische Kräfte in Definition und Messung grundsätzlich von den Dimensionen des Leiters unabhängig sind, also die Berücksichtigung der hier kaum systematisch zu verfolgenden Deformationen unnötig machen. Während die meisten Beobachtungen über Nachwirkung und Hysteresis sich nur auf die Deformationen beziehen, werden hier nur die Änderungen der inneren Struktur gemessen, aller-

1) W. Thomson, Trans. Roy. Soc. 146. p. 709. 1856; Mathem. Papers II. p. 267.

2) Literatur vgl. W. Vehrighs, Diss. Jena 1913.

dings in einem sehr willkürlichen Maßstab, was gleichgültig ist, solange diese Strukturänderung nicht selbständig definierbar ist. Das allgemeine Ergebnis der Untersuchung war, wie vorausgeschickt sei, daß die Gesetze der elastischen Hysteresis vollkommen mit der magnetischen übereinzustimmen scheinen, soweit eine Tensorwirkung und eine Vektorwirkung vergleichbar sind, daß ferner dem „Fließen“ der Metalle wahrscheinlich keine gesetzmäßig damit verknüpfte Strukturänderung entspricht.

Historisch sei noch bemerkt, daß Beobachtungen über die Thermokräfte bei nicht reversibeln Deformationen auch bereits vorliegen¹⁾, da naturgemäß jeder Beobachter der elastischen Effekte auf sie stoßen müßte. Insbesondere ist die Existenz einer Hysteresis bei thermoelektrisch-elastischen Wirkungen schon von Cohn und von Ewing²⁾ aufgefunden worden. Systematische Beobachtungen darüber scheinen nicht vorzuliegen.

Teil I.³⁾

Beobachtungen im Bereich der elastischen Deformationen.

Theorie. Die Theorie der elastisch-thermoelektrischen Erscheinungen beschränkt sich auf den formalen Ansatz, d. h. auf Feststellung dessen, was unter Annahme linearer Beziehungen zwischen Ursache und Wirkung aus den Symmetrieverhältnissen gefolgert werden kann. Solche Ansätze gelten analog für alle akzidentellen Effekte und sind wohl zuerst von F. Neumann⁴⁾ für die akzidentelle Doppelbrechung aufgestellt worden. Für die Thermokraft speziell als Folge eines im Leiter vorhandenen Temperaturgefälles sind die Symmetriebeziehungen entsprechend den für die Wechselwirkung zweier gleichartiger Vektoren bestehenden Sätze aufzustellen. Diese sind in endgültiger Form von W. Voigt⁵⁾ angegeben worden, in dessen Ansätzen bei sinngemäßer Übertragung alles ent-

1) Literatur vgl. W. Vehrighs, l. c.

2) Wied. Ann. 6. p. 385. 1879; Proc. Roy. Soc. 32. p. 399. 1881.

3) Gekürzte Wiedergabe der Diss. von W. Vehrighs: Die vollständige Bestimmung der Konstanten der akzidentellen Thermokräfte. Jena 1914.

4) F. Neumann, Pogg. Ann. 54. p. 449. 1841.

5) W. Voigt, Theor. Phys. II. p. 298; Krystallophysik, Kap. VI.

halten ist, was über unsere Erscheinung zu sagen ist. Wir stellen im folgenden kurz zusammen, was daraus für die Beobachtung direkt gebraucht wird.

Zunächst werde vorausgesetzt, daß in allen Fällen die benutzten Temperaturdifferenzen $\Delta\tau$ so klein seien, daß eindeutig von einer bestimmten Thermokraft pro Grad e gesprochen werden kann. Sei also stets¹⁾

$$e = \frac{E}{\Delta\tau}.$$

Aus dem Leiter sei ein Elementar-Parallelepiped so herausgeschnitten, daß seine Kanten den drei Hauptdrucken X_x, Y_y, Z_z parallel liegen. Da dies immer möglich ist, muß jede elastische Wirkung sich vollständig und restlos als Funktion dieser drei Hauptdrucke darstellen lassen. Denken wir uns weiter einen beliebig gerichteten Wärmestrom durch das Parallelepiped treten, so können wir durch Anbringung von Elektroden auf je zwei gegenüberliegenden Flächen eine Thermokraft abnehmen, die Funktion der Hauptdrucke ist, und proportional mit der in die betreffende Richtung fallenden Komponente des Temperaturgefälles. Sind die Elektroden aus demselben Material wie der Leiter selbst, so werden die Thermokräfte mit den Drucken selbst zu Null, und wir kommen auf folgendes Gleichungssystem für die Thermokräfte pro Grad in den drei Richtungen²⁾

$$e_x = c_t X_x + c_t Y_y + c_t Z_z,$$

$$e_y = c_t X_x + c_e Y_y + c_t Z_z,$$

$$e_z = c_t X_x + c_t Y_y + c_e Z_z.$$

Durch die Anbringung der drei Hauptdrucke hat das Parallelepiped die Anisotropie eines Kristalls angenommen, und zwar die des rhombischen Systems. Für den allgemeinsten Fall der Thermokraft in beliebiger Richtung sind also weiter die für Kristalle maßgebenden Sätze zu benutzen. In diesem Sinne sind dann e_x, e_y, e_z die drei „Hauptkoeffizienten“, aus

1) Abweichungen vom linearen Verhalten sind auch bei akzidentellen Thermokräften bekannt. Vgl. Siegel, Diss. Leipzig 1911. p. 67.

2) Auch Abweichungen von der linearen Abhängigkeit vom Druck sind beobachtet (vgl. p. 792). Die Koeffizienten können sogar in Spezialfällen Null werden, so daß die quadratischen Glieder entscheiden.

denen Richtung und Größe der Thermokraft für beliebige Fälle nach zwei gleichfalls von F. Neumann stammenden Sätzen über Kristalle zu bestimmen sind. Für diese mag der Verweis auf die Literatur genügen, da sie an der Beobachtung bisher nicht geprüft sind.¹⁾

Statt der hier gewählten Darstellung der Erscheinung durch die Drucke können die Deformationsgrößen eingeführt werden, z. B. wie bei W. Voigt die räumliche Dilatation und die Scherung. Es erscheint praktischer — in Hinsicht auf die Erweiterung der Beobachtungen auf das nicht mehr elastische Gebiet — die Drucke einzuführen, da diese naturgemäß direkt als unabhängige Variable gegeben sind.

Spezialfälle. Die Größen c_t und c_i sind die charakteristischen Materialkonstanten, die aus der Beobachtung der thermoeletromotorischen Kräfte eines beanspruchten gegen einen unbeanspruchten Leiter gefunden werden, wenn die drei Hauptdrucke und die Temperaturen gegeben sind. Man mag dabei an ein Schema, wie Fig. 1, denken.

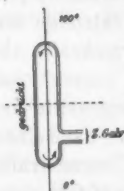


Fig. 1.

Ein Draht (oder Rohr) sei mit seiner oberen Hälfte auf 100° , unten auf 0° gehalten. Die linke Hälfte werde irgendwie deformiert (durch Dehnung, Torsion, Außen- oder Innendruck). Dann läßt sich die auftretende Thermokraft durch Einschaltung eines Galvanometers zwischen zwei beliebige gleichtemperierte Punkte, praktisch im rechten unteren Quadranten des Schemas, messen.

Zur Beobachtung geeignete Spezialfälle sind folgende.

a) Einfacher Längszug $Y_y = Z_z = 0$; $e_x = c_i X_x$; da der Wärmestrom in der x -Richtung fließt, kommen e_y und e_z nicht zur Beobachtung.

b) Hydrostatischer Druck $X_x = Y_y = Z_z = p$

$$e_x = (c_i + 2 c_t) p.$$

c) Torsion. Das Parallelepipiped liegt um 45° geneigt zur Drahtachse. z stehe senkrecht auf dieser. Die Wärmestrom-

1) Vgl. W. Voigt, Elementare Kristallphysik, p. 53 ff.

komponenten nach x und y sind dann gleich, die Hauptdrucke entgegengesetzt gleich und es wird

$$e_x = -e_y = (c_i - c_e) X_x; \quad e_z = 0.$$

Hiermit wird auch die Thermokraft in der Richtung der Drahtachse zu Null, wie von vornherein aus Symmetriegründen abzusehen. Es entscheiden also bei der Torsion die quadratischen Koeffizienten.

d) Rohr unter Innen- und Außendruck, p_i und p_a . Die Hauptdrucke liegen axial, tangential und radial. Sind r_i und r_a der innere und äußere Radius, und ist z die senkrechte Entfernung des Elementes von der Innenfläche, also gleich $r - r_i$, so betragen die Hauptdrucke¹⁾

$$X_x = \frac{p_a r_a^2 - p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \text{ axial,}$$

$$Y_y = \frac{p_a r_a^2 - p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} - \frac{p_i - p_a}{x^2} \frac{r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \text{ tangential,}$$

$$Z_z = \frac{p_a r_a^2 - p_i r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} + \frac{p_i - p_a}{x^2} \frac{r_i^2 r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \text{ radial.}$$

Man sieht, daß unabhängig von der speziellen Lage des Parallelepipeds stets

$$Y_y + Z_z = 2X_x.$$

Somit wird die direkt beobachtbare Thermokraft in der Achsenrichtung überall zu

$$e_x = (c_i + 2c_e) x_x.$$

Bei der Beobachtung wird speziell bequem $p_a = 0$, oder jedenfalls klein gegen p_i . Dann ist

$$e_x = -(c_i + 2c_e) p_i \frac{r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} = -(c_i + 2c_e) p_i f.$$

Obleich die Deformation an sich inhomogen ist, ist ihr Längseffekt also für alle Stellen der gleiche. Dies ist für die Beobachtung günstig, da mit Rohren beliebiger Wandstärke gearbeitet werden kann.

Man überzeugt sich außerdem leicht, daß, wenn $r_i = 0$, p_a aber endlich

$$e_x = (c_i + 2c_e) p_a,$$

1) Vgl. z. B. C. Bach, Elastizität und Festigkeit, 4. Aufl. p. 528ff.

was auf den Fall des hydrostatischen Drucks bei einem Draht zurückführt.

Für die Aufgabe, die Koeffizienten c_t und c_s einzeln zu bestimmen, ist es nötig, zwei der aufgezählten Fälle in geeigneter Weise zu kombinieren, entweder a) und b), oder a) und d). Aus vorliegenden Resultaten früherer Beobachter nach Methoden a) und b) läßt sich die Berechnung für eine Anzahl von Fällen schon ausführen, soweit an nicht identischem Material gewonnene Zahlen überhaupt dazu berechtigen. Einige derartige Messungen sind auch von uns ausgeführt worden. Sie zeigten, daß diese Methode nicht eben günstig ist, da die Beobachtung mit hydrostatischem Druck meist nur sehr kleine Effekte liefert, wenn man nicht zu Drucken von 1000 oder mehr Atmosphären schreitet, die schwer zu bewältigen sind. Wir haben daher Beobachtungen am rohrförmigen Material unter Längszug und Innendruck kombiniert. Der Ausdruck für e_x zeigt, daß man bei hinreichend dünnwandigen Rohren durch den Faktor $r_i^2/r_a^2 - r_i^2$ den Effekt schon bei mäßigem Innendruck genügend groß bekommen kann. Weiter ist die Sicherung wohldefinierter Temperaturen durch direkt aufgesetzte Bäder hier bequemer. Schließlich erwies sich die Röhrenform auch für die im Teil II zu beschreibenden Torsionsversuche als günstig. Hier ist eine homogene Deformation für die eindeutige Definition des Effekts nötig und die Torsion ist nur bei dünnwandigem Rohr genähert homogen ausführbar.

Versuchsanordnung: Die Versuchsanordnung ist im Prinzip immer dem Schema Fig. 1 nachgebildet. Bei der Beobachtung des Dehnungseffektes an einfachen Drähten konnten diese direkt in die dort gezeichnete Form gebogen werden. Die gebogenen Stücke sind in stärkere Ösen aus Stahl eingehängt, die von den isolierten Spannbacken einer Zerreißmaschine gehalten werden. Diese Anordnung ist besonders frei von Störungen durch ungewollte Thermokräfte, da Lötungen im Dampfbad vermieden sind. Die Untersuchung von Rohren wurde in einer Anordnung wie Fig. 2 vorgenommen. Vorteilhaft, wenn auch prinzipiell nicht notwendig, ist es, den Verbindungsdraht im Dampfbad aus dem Material des Rohres selbst herzustellen. Technisch schwierig ist hier die Befestigung der

Rohe an den Spannbacken der Zerreißmaschine, wenn Züge bis nahe an die Festigkeitsgrenze ausgeübt werden sollen. Weichlötungen sind unzureichend, Hartlötungen beeinträchtigen (besonders bei Stahl) die Festigkeit des Materials. Flach zusammengeklopfte Enden oder auch weich aufgelötete Gewindemuttern sind brauchbar, genügen aber auch nicht völlig bei den im Teil II zu beschreibenden mit Torsion kombinierten Zügen, so daß hier eine Vervollkommnung entschieden noch wünschenswert wäre. Die Zuführung des *Innendruckes*, der von einer Hochdruckhandpumpe mit Rizinusölfüllung geliefert wurde, geschah durch ein von Schäffer und Budenberg, Magdeburg, geliefertes T-Stück aus Stahl, das gleichzeitig alle zur Verwendung kommenden Züge aushielt. Für einige Versuche war es wünschenswert, auch *Stauchungen* eines Rohres ausführen zu können. Um in diesem Fall die Knickfestigkeit bei gegebenem Material möglichst zu steigern, mußte die Länge des Rohres möglichst verkleinert werden. Die Erwärmung durch Dampf wurde dann von innen aus vorgenommen, wobei die Gesamtlänge des Rohres auf 10 cm reduziert werden konnte. — Für die *Torsionen* schließlich wurde das Rohr doppelt so lang wie gewöhnlich genommen. In der Mitte, nämlich unterhalb des kalten Bades, wurde es durch ein an der Maschine befestigtes Kugellager geführt und von einer fest aufgesetzten Scheibe aus tordiert. Bei dünnwandigen Rohren berechnet sich der tangentielle Druck per Flächeneinheit wie folgt:

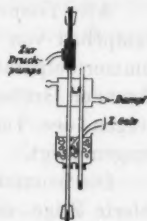


Fig. 2.

Sei r der Radius des Rohres,

d die Wandstärke,

also $q = 2\pi r d$ der Materialquerschnitt.

Sei R der Scheibenradius,

K die an der Scheibe wirkende Kraft, von der auf jede Rohrhälfte $\frac{1}{2} K$ entfällt,

dann sind im Gleichgewicht die Drehmomente gleich, also

$$\frac{1}{2} K R = p_t \cdot q \cdot r,$$

mithin wird

$$p_t = \frac{1}{2} \frac{K R}{q r}$$

der angenähert gleichförmige tangentielle Druck. Die Benutzung von Drähten würde stark inhomogene Deformationen liefern, deren Wirkung vollkommen unübersichtlich wäre.

Als *Temperaturbäder* wurden bisher ausschließlich ein Dampfbad von 100° und ein Eisbad oder ein Wasserbad von Zimmertemperatur verwandt; letzteres erwies sich bei genügender Größe noch konstanter, da es zwar langsame Änderungen der Temperatur aber keine unregelmäßigen Schwankungen zeigt.

Die benutzte *Zerreißmaschine* von Amsler-Laffon & Sohn lieferte Züge und Stauchungen bis 2000 kg, die *Hochdruckpumpe* derselben Firma reichte bis 2000 Atm. Die selbsthergestellte *Torsionsvorrichtung* lieferte Drehmomente bis 3000 kg/mm, so daß alle drei Apparate die Festigkeitsgrenzen der benutzten Materialien übertrafen. Es war möglich die verschiedenen Deformationen z. T. auch in Kombination auszuführen (vgl. Teil II).

Die elektrische Messung wurde in einer Kompensationschaltung ausgeführt, wobei indes nur die ungewollten Thermokräfte kompensiert wurden, während die Effekte selbst durch den Ausschlag gemessen wurden. Das zuerst benutzte Panzergalvanometer ließ sich im weiteren Verlauf der Arbeit durch ein D'Arsonvalinstrument (Hartmann & Braun-Type) ersetzen. Die größten auftretenden elektromotorischen Kräfte waren etwa 10 Mikrovolt, doch ist es oft wünschenswert, $\frac{1}{100}$ Mikrovolt noch zu erkennen.

Resultate über elastische Effekte. Für die Auswahl der Materialien maßgebend ist hauptsächlich die Möglichkeit sie in Gestalt geeigneter Röhren zu beschaffen, die, besonders bei reinen Metallen, sehr beschränkt ist. Es entfällt daher auch die Möglichkeit, systematisch nach Beziehungen zu anderen Eigenschaften zu suchen. Es darf wohl bemerkt werden, daß frühere Versuche in dieser Richtung dann bedenklich erscheinen, wenn eine Erscheinung, wie die unsere, die notwendig durch zwei Konstanten dargestellt werden muß, in Beziehung gesetzt wird zu einer anderen, die durch eine einzige Konstante zu beschreiben ist.

Für die Wahl des *Vorzeichens* x scheint uns folgende Regel am konsequentesten: Positive Koeffizienten werden einem

Metall gegeben, das durch positive Beanspruchung (Druck) thermoelektrisch positiver wird. Dabei bedeutet positive Thermoelektrizität eine Stromrichtung von der kalten Lötstelle zum Vergleichsmetall, hier also dem unbeanspruchten, hin, wie es der meist angenommenen Kelvinschen Bezeichnungsweise entspricht, also wie im Schema p. 786.

1. *Unmagnetischer Nickelstahl*. Dieses hervorragend elastische Material stand uns in fertiger Form durch die besondere Gefälligkeit der Firma Krupp zur Verfügung. Es war ausgesucht wegen eines von G. S. Meyer geäußerten Bedenkens gegen magnetisierbare Materialien. In der Tat sind die an ihm beobachteten Erscheinungen wesentlich einfacher, wie am gewöhnlichen Eisen und Stahl.

Dimensionen: $r_a = 6$ mm; $r_i = 5$ mm; $q = 34,6$ qmm;

$$A = \frac{r_i^3}{r_a^3 - r_i^3} = 2,27.$$

Tragkraft ca. 2000 kg; zulässiger Innendruck ca. 1200 Atm.; Thermokraft gegen Kupfer — 5,9 Mikrovolt/Grad.

Die einzelnen Beobachtungsdaten mögen hier unter Verweis auf die zitierte Dissertation übergangen werden. Zum Beweis der Proportionalität der Effekte und als Beispiel für eine Berechnung seien nur folgende Zahlen angeführt.

a) Längszug:

Belastung P	Ausschlag α	$\alpha/P \cdot 100$
200 kg	2,04 cm	1,02
300 „	3,05 „	1,02
400 „	4,12 „	1,03

Hierbei war $1 \text{ cm} = 2,35 \cdot 10^{-7}$ Volt; Temp.-Diff. 100° ;

Spannung bei $P = 100$ kg ist $\frac{100}{34,6} = 2,89$ kg/qmm.

Damit wird

$$c_l = \frac{1,2 \cdot 2,35 \cdot 10^{-7}}{2,89 \cdot 100} = 8,3 \cdot 10^{-10} \text{ Volt kg/mm/Grad}$$

und zwar mit negativem Vorzeichen.

b) Innendruck:

Druck p	Ausschlag α	α/p
100 Atm.	2,49 cm	2,49
200 „	5,06 „	2,53

α/p Gesamtmittel 2,53 für $p = 100 \text{ Atm.} = 1 \text{ kg/qmm}$; $1 \text{ cm} = 1,89 \cdot 10^{-7} \text{ Volt}$; Temp.-Diff. 100° ; $A = 2,27$. Damit wird

$$c_i + 2c_t = \frac{2,53 \cdot 1,89 \cdot 10^{-7}}{2,27 \cdot 100} = 21,0 \cdot 10^{-10} \text{ Volt, kg, mm, Grad,}$$

auch mit negativem Vorzeichen. Schließlich findet sich also

$$c_i = -8,3 \cdot 10^{-10},$$

$$c_t = -6,4 \cdot 10^{-10}.$$

2. *Patentspiraldraht* (Klaviersaite). Bei diesem Material ließ sich die Spannung bis auf 97 Proz. der Bruchfestigkeit steigern, ohne daß ein merkliches Fließen eintrat. Ebenso waren Hysteresiserscheinungen nur ganz unwesentlich. Es zeigte sich bei so intensiver Beanspruchung eine deutliche Abweichung des Effektes von der Proportionalität.

Festigkeit 720 kg = 231 kg/qmm;

Thermokraft gegen Kupfer + 5,2 Mikrovolt/Grad.

Belastung	Ausschlag	Differenz
350 kg	9,7 cm	9,7 cm
700 „	22,6 „	12,9 „

Der Effekt wächst aber mehr als proportional. Aus der ersten Zeile berechnet wird

$$c_t = +23,1 \cdot 10^{-10},$$

$$c_i \text{ nicht beobachtet.}$$

Die übrigen untersuchten Stahl- und Eisensorten zeigten alle starke Hysteresiserscheinungen. Hierüber vgl. Teil II.

3. *Kupfer* bezogen von M. Cochius, Berlin. Dimensionen wie Stahlrohr 1; Festigkeit ca. 1000 kg, also 29 kg/qmm; zulässiger Innendruck (empirisch) 340 Atm.; Effekt der Längsdehnung proportional bis 600 kg, bei Innendruck bis 200 Atm.

$$c_t = +6,3 \cdot 10^{-10}; c_i + 2c_t = +3,5 \cdot 10^{-10};$$

$$c_i = -1,4 \cdot 10^{-10}.$$

4. *Neusilber* von M. Cochius, Berlin.

Festigkeit 900 kg, nämlich 60 kg/qmm (empirisch);

Festigkeit für Innendruck 340 Atm. (empirisch);

Thermokraft gegen Kupfer - 17,5 Mikrovolt/Grad;

Proportionalität des Effekts bis 300 kg Dehnung und 200 Atm. Innendruck

$$c_t = +14,0 \cdot 10^{-10}; c_i + 2c_t = +13,5 \cdot 10^{-10}$$

$$c_i = -0,25 \cdot 10^{-10}.$$

5. *Messing*. Die verschiedenen Messingsorten zeigen sehr unterschiedliches Verhalten; einige zeigen starke Hysteresis (vgl. Teil II). Das vom Lager der Firma Zeiss bezogene Rohr zeigt einfachere Eigenschaften. Folgende Werte wurden daran bestimmt:

Festigkeit 1200 kg, nämlich 42,5 kg/qmm;

Festigkeit für Innendruck 600 Atm.;

Thermokraft gegen Kupfer $-2,5$ Mikrovolt/Grad;

Proportionalität des Effekts bis 700 kg und bis ca. 400 Atm.

$$c_1 = 5,6 \cdot 10^{-10}; \quad c_e + 2c_i = 3,5 \cdot 10^{-10}$$

$$c_i = -1,05 \cdot 10^{-10}.$$

Versuche mit hydrostatischem Drucke. Solche wurden unternommen zur Bestätigung und Vervollständigung der angeführten Versuche. Die Resultate waren indes weit weniger vollkommen, als die mit dem Röhrenapparat, da die Kleinheit des Effektes eine günstigere, störungsfreie Aufstellung des Galvanometers verlangt hätte. Unter Verweis auf die zitierte Dissertation seien die Zahlen hier übergangen, und es mag nur bemerkt werden, daß die Resultate jedenfalls mit den übrigen nicht in Widerspruch stehen. In der zitierten Arbeit findet sich auch eine Zusammenstellung aller aus eigenen und fremden Beobachtungen berechenbaren Zahlen.

Teil II.

Elastische Hysteresis, Plastizität, Nachwirkung.

Alle Metalle, die nach der im ersten Teil beschriebenen Methode untersucht werden, zeigen bleibende Veränderungen, wenn die Beanspruchung stark war. Bei weichen Metallen sind diese von einer dauernden Formänderung begleitet (Fließen), bei zähen dagegen kann die Strukturänderung allein auftreten. Unterwirft man solche Materialien zyklischen Belastungen, so entsprechen der aufsteigenden und absteigenden Spannung verschiedene Thermokräfte, nach Ablauf eines oder einiger Zykeln ist der ganze Vorgang beliebig oft unverändert reproduzierbar. Alle demnächst zu beschreibenden Kurven sind solche Hysteresiskurven, die nach mehrfacher vorausgegangener zyklischer Belastung als Endzustände erhalten sind. Wahrscheinlich lassen sich bei allen Metallen solche

reproduzierbare Zyklen erhalten, wenn man den Bereich des Fließens vermeidet, also die Grenzen des Zyklus eng genug hält.

Elastische Hysteresis. Eine vollständige Hysteresiskurve sollte durch zyklische Belastung zwischen beliebig hohen positiven und negativen Drucken erhalten werden. Das verbietet sich wegen der Zugfestigkeit und besonders wegen der Knickfestigkeit der Rohre, die nur beschränkte Stauchungen zuläßt. Fig. 3 zeigt eine am Stahlrohr zwischen gleich großen positiven und negativen Drucken erhaltene Hysteresiskurve, Fig. 4 eine am Atlasstahl zwischen Null und möglichst hohen Zügen aufgenommene. Durch Kombination dieser zwei und anderer läßt sich ein schematisches Bild der vollständigen Erscheinung

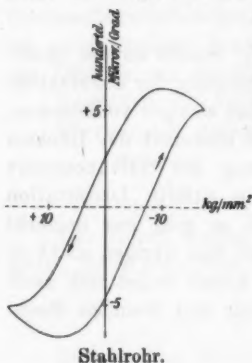


Fig. 3.

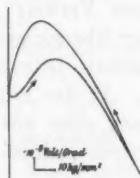


Fig. 4.



Fig. 5.

konstruieren, etwa wie Fig. 5a. Diese Kurve zeigt in ihren Einzelheiten alle Eigenschaften einer magnetischen Hysteresis-schleife. Man kann unterscheiden: eine jungfräuliche Kurve mit dem Anfangseffekt, der der Anfangspermeabilität entspricht, und hier negativ ist; eine Sättigung ($\partial e / \partial p$) $_{\infty}$, hier auch negativ; Remanenz, positiv; Koerzitivkraft. Hätten Remanenz und Anfangseffekt gleiches Vorzeichen, wie in der schematischen Fig. 5b, so würde die magnetische Analogie noch mehr in die Augen fallen. Aus Fig. 3 würden sich etwa folgende Werte für das benutzte Stahlrohr ergeben:

Anfangseffekt	$- 30 \cdot 10^{-10}$ Volt, kg, Grad, mm,
Sättigung ca.	$- 25 \cdot 10^{-10}$ "
Remanenz	$+ 3,6 \cdot 10^{-10}$ Mikrovolt/Grad,
Koerzitivspannung	5,8 kg/qmm.

Zur Beurteilung der Größe der Koerzitivspannung kann die Angabe dienen, daß durch 5,8 kg/qmm eine Dehnung von etwa $\frac{1}{3500}$ hervorgebracht wird und daß die Zerreißfestigkeit 52 kg/qmm beträgt.

Als ausdrücklicher Unterschied gegenüber den Magnetisierungskurven sei hervorgehoben, daß Symmetrie für positive und negative Spannungen nicht vorhanden zu sein braucht, wie auch Fig. 3 zeigt. Wegen des Auftretens quadratischer Glieder im Effekt liefern nämlich größere Drucke und Züge nicht entgegengesetzt gleiche Thermokräfte, auch dann nicht, wenn Hysteresis fehlt.

Das Auftreten merklicher quadratischer Glieder hat zur Folge, daß auch durch Torsionen gleiche Erscheinungen hervorgerufen werden, die nach p. 787 mit linearen Gliedern allein ausgeschlossen sind. Die oberste Kurve der Fig. 12 zeigt eine am gleichen Stahl durch Torsionen hervorgerufene Hysteresisschleife. Die Unsymmetrie und der nicht vollständige Schluß sind hier eine Folge der nicht ganz vollkommenen Beobachtungsmethode, und werden sich beseitigen lassen.

Nur die magnetisierbaren Materialien liefern die beschriebenen Erscheinungen in solcher Vollständigkeit. Andere Körper, die in größerer Zahl untersucht wurden (vgl. unten) zeigen sie nur zum Teil, sei es, weil ihre ungenügende Festigkeit große Spannungen nicht zuläßt, sei es, was wahrscheinlicher ist, daß ein prinzipieller Unterschied besteht.

Der reversible Anteil des Effektes. Es erwies sich als möglich die magnetische Analogie weiter zu verfolgen. Von R. Gans¹⁾ sind die sogenannten reversiblen Magnetisierungen aufgefunden und untersucht worden. In der Tat existieren für unseren Effekt auch reversible Anteile, die folgendermaßen zu definieren sind: Geht man von irgendeinem Punkt der Hysteresiskurve mit der Spannung zurück in das eben verlassene Gebiet, so erhält man Effekte, die nicht auf der Hysteresiskurve liegen. Sind diese Rückschritte klein genug, so fallen auf ihnen Hin- und Rückweg zusammen, die Hysteresisarea fehlt also, und sie lassen sich beliebig oft unverändert wieder-

1) R. Gans, Ann. d. Phys. 27. p. 1. 1903; 29. p. 301. 1909.

holen. Sie mögen als *reversible Verspannungen* bezeichnet werden.

Zum Belege diene die folgende Tabelle und die dazu gehörige Fig. 6, die an sogenanntem Bohrstahl beobachtet sind.

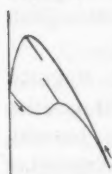


Fig. 6.

Belastung	Ausschlag	Verspannung	reversibler Effekt
0 kg	0	0—25 kg	— 1,13
75 „	— 1,00	75— 50 „	— 1,81
150 „	— 5,30	150—125 „	— 2,80
25 „	+ 2,60	25— 50 „	— 1,59

Die bei 0 und 150 kg aufgenommenen reversiblen Effekte fallen hier ihrer Natur nach mit den Tangenten der Hysteresiskurve zusammen, in der Figur mit den Pfeilrichtungen. Die reversiblen Effekte erweisen sich als eine sehr nahe lineare Funktion der *Drucke*, ihre Größe scheint nicht davon abhängig, auf welchem Ast der Hysteresiskurve sie aufgenommen sind. Da sie für negative und positive Drucke nicht gleich groß sind, muß auch die Hysteresiskurve, wie oben angegeben, unsymmetrisch sein.

Als weitere Beispiele reversibler Verspannungen seien noch die an hartem Messing, Durana¹⁾ und Stahlrohr erhalten Kurven Fig. 7 u. 8 und Fig. 9, I. verwiesen.

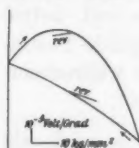


Fig. 7.



Fig. 8.

Für alle Stoffe mit ausgesprochener Hysteresis lassen sich die reversiblen Anteile des Effektes an die Stelle der im Teil I besprochenen elastischen Effekte setzen.

Außer diesen longitudinalen reversiblen Verspannungen sollten auch transversale möglich sein, und mit einem unter Innendruck gebrachten Rohr beobachtet werden können. Es war uns dies nicht möglich, weil im Gegensatz zu den bisher angeführten Beobachtungen die Ausbildung dieser Erscheinung durch Nachwirkung so verzögert war, daß sie sich nicht mit genügender Sicherheit von zufälligen Nullpunktsschwankungen trennen ließ. Bei reinen Longitudinaleffekten traten nur bei einigen Bronzen deutliche Nachwirkungen auf; es ist wohl

1) Diese messingähnliche sehr zähe Legierung wurde von den Dürerer Metallwerken bezogen.

anzunehmen, daß im übrigen, jedenfalls bei den Stählen, die Nachwirkung kurz war gegen die Periode des Galvanometers.

Hysteresis bei gleichzeitiger Wirkung mehrerer Deformationen.
Im Falle der hysteresisfreien Effekte erledigt sich die Frage nach der Wirkung kombinierter Spannungen einfach dadurch, daß die Effekte sich superponieren, wie alle rein elastischen Erscheinungen. Die Hysteresis erfährt jedoch durch gleichzeitige Einwirkung einer zweiten Spannung stets eine starke Änderung ihrer Größe, mitunter sogar ihres Vorzeichens. Die Verfolgung dieser Erscheinungen schien von Interesse, weil über ihr magnetisches Analogon schon eine größere Reihe von Untersuchungen vorliegt¹⁾, dann auch weil die Wirkung kombinierter Spannungen zur Festigkeit Beziehungen hat.

Allerdings ist die Anzahl der möglichen Kombinationen so groß, daß wir vorerst nur Einzelfälle behandeln konnten. Zwei Hauptfragen können unterschieden werden: 1) Wie ändert sich eine bestimmte Hysteresiskurve durch gleichzeitige dauernde Einwirkung einer zweiten Spannung. 2) Wie wirkt plötzliches Hinzutreten einer zweiten Spannung auf eine schon vorhandene Hysteresis?

Die Frage 1 haben wir in einigen Einzelfällen mit folgenden Resultaten behandelt (die Fälle a, b, d beziehen sich auf Stahlrohr).

a) Hysteresis der Dehnung bei gleichzeitigem Innendruck. Fig. 9, I zeigt die normale Hysteresis zwischen 0 u. 800 kg (mit zwei reversiblen Verspannungen); III dieselbe während dauernd ein Innendruck von 260 Atm. wirkte. Da dieser Innendruck einen Längszug von 200 kg mit sich bringt, ist in II die Hysteresis zwischen 200 u. 1000 kg ohne Innendruck zum Vergleich eingezeichnet. Die Hysteresis wird durch den Innendruck also vergrößert, während die reversiblen Anteile (Endtangenten) ziemlich unverändert bleiben.

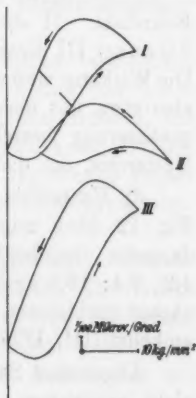


Fig. 9.

1) Vgl. J. A. Ewing, Magnetische Induktion. Kap. IX.

b) Hysteresis der Dehnung bei gleichzeitiger Torsion Fig. 10, I ist wieder die normale Hysteresisschleife. II, III, IV dieselbe, während gleichzeitig konstante Torsionen (Scherungen) von 7,6; 14,7; 17,6 kg/qmm wirksam waren. Die Hysteresis wird durch die Torsion verkleinert.

c) Hysteresis der Dehnung bei gleichzeitiger Magnetisierung, also der Gegenfall zu Ewings Untersuchungen. Fig. 11, I zeigt die normale Hysteresiskurve an sogenanntem



Fig. 10.



Fig. 11.

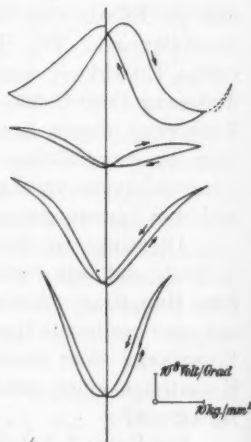


Fig. 12.

Bohrstahl. II dieselbe bei schwacher Magnetisierung (etwa 2 Gauss), III dieselbe bei starker Magnetisierung (fast gesättigt). Die Wirkung muß vom Sinn der Magnetisierung unabhängig sein, also etwa mit deren Quadrat wachsen. Der Einfluß der Magnetisierung besteht in einer sehr starken Verminderung der Hysteresis, die dadurch fast zum Verschwinden zu bringen ist.

d) Hysteresis der Torsion bei gleichzeitiger Dehnung. Fig. 12, oben zeigt die normale Hysteresiskurve der Torsion, darunter dieselbe bei einer dauernd bestehenden Dehnung von 4,2; 8,4; 16,8 kg/qmm. Man bemerkt, daß die Hysteresis zunächst verkleinert wird (II), daß sie dann sogar ihr Vorzeichen umkehrt (III, IV).

Allgemeine Sätze lassen sich aus diesen Beobachtungen nicht entnehmen, indes werden sie sich ohne Schwierigkeit systematisch vervollständigen lassen. Von besonderem Interesse würde die Frage nach der Hysteresis bei gleichzeitiger

Wirkung dreier gleicher und senkrechter Drucke sein, also beim hydrostatischen Druck. Man wird vermuten, daß eine Hysteresis hier nicht existiert. Mit unserer Anordnung läßt sich die Frage nicht prüfen. Nach den Beobachtungen von Wagner¹⁾ scheint es, als ob Hysteresis fehlte, allerdings sind die angewandten Drucke relativ klein.

Plastizität; Fließen der Metalle. Nur einige wenige Versuche über die Wirkung einer Längsdehnung bei weichen, sehr dehnbaren Metallen, nämlich Kupfer und weichem Messing, liegen vor. Mit dem Vorbehalt, den diese Beschränkung auferlegt, sei das Resultat davon angegeben. Es fand sich, daß bis zum Fluß die akzidentelle Thermokraft linear mit der Spannung wächst und reversibel ist. Mit beginnendem Fluß tritt ein bleibender Effekt auf, der in den beobachteten Fällen entgegengesetztes Vorzeichen wie der reversible hatte, der aber bei weiter gesteigerter permanenter Dehnung nicht dauernd wächst, sondern eher einem Grenzwert zustrebt. Beim Fließen bleibt also das Metall schließlich in einem Dauerzustand, ohne daß seine Anisotropie zunimmt. Wenn bei sehr weichen Körpern (Blei) das Fließen schon bei minimalen Zügen eintritt, können sie fast isotrop bleiben.

Schluß. Die beschriebenen Erscheinungen führen zu der Auffassung, daß die Vorgänge jenseits als Elastizitätsgrenze von doppelter Natur sind.

1. Es finden Übergänge zwischen Zuständen verschieden starker und wohl auch verschiedenartiger Anisotropie statt. Jeder solche Zustand ist ein innerhalb gewisser Grenzen, die durch die reversiblen Verspannungen charakterisiert sind, stabiler Gleichgewichtszustand. Die den Übergang begleitende Deformation ist endlich und ist eindeutig durch die Spannungsänderung bestimmt.

2. Es finden Formänderungen ohne begleitende Strukturänderungen statt, oder unabhängig von solchen. Die Größe dieser „plastischen“ Deformationen ist außer von der Größe der Spannungen auch von deren Dauer abhängig; wahrscheinlich bestimmen reibungsartige Widerstände, ähnlich wie bei Flüssigkeiten, ihren Verlauf.

Es läßt sich denken, daß die elastische Nachwirkung, die

1) E. Wagner, Ann. d. Phys. 27. p. 955. 1908.

ja stets eine bestimmte endliche Deformation liefert, nichts anderes ist als der zeitliche Verlauf der Erscheinung, die zur Remanenz der Anisotropie führt. Sie wäre dann grundsätzlich an eine Veränderung der Äolotropie gebunden, während das „Fließen“ im Gegenteil den Grad der Äolotropie nicht verändert.

Die beiden Erscheinungen werden vermutlich selten soweit getrennt auftreten, daß sie einzeln am gleichen Körper zu beobachten sind. Immerhin scheinen die Stähle innerhalb weiter Gebiete frei von Plastizität zu sein, während z. B. das Blei trotz sehr starker Plastizität keine erkennbare Äolotropie annimmt.

Beide Prozesse sind mit Energieverlust verbunden. Dessen Größe wird im Fall der reinen Hysteresis nur durch die Grenzen der Spannung bestimmt, zwischen denen der Vorgang sich abspielt, wenigstens dann, wenn die Nachwirkung im wesentlichen während des Prozesses abläuft. Im Falle der Plastizität ist aber gerade die Geschwindigkeit des Vorgangs für die Wärmeproduktion maßgebend. In Übereinstimmung hiermit sind Resultate über den Energieverlust bei Torsionsschwingungen, die C. Schmidt¹⁾ erhielt. Er fand bei Stahlstäben, daß es richtiger ist anzunehmen, daß die Dämpfung „nur durch den inneren Spannungszustand bedingt wird, nicht durch die Änderungsgeschwindigkeit der Elongation“, wie das nach W. Voigts²⁾ Untersuchungen bei vielen Metallen und Kristallen möglich gewesen war.

Eine theoretische Erklärung der Erscheinungen muß sich, entsprechend der weitgehenden Analogie, wohl am ehesten der Molekulartheorie der Magnetisierung anschließen, welche mit der Existenz verschiedener Gleichgewichtslagen polarer Moleküle operiert.

Nicht annehmbar scheinen Erklärungen, welche die Zustände verschiedener Äolotropie als partielle Umwandlungen verschiedener Modifikationen ineinander auffassen, oder als Veränderungen des mikrokristallinen Gefüges. Die Diskussion hierüber mag aber aufgeschoben werden, bis die Tatsachen in größerer Vollständigkeit bekannt sind.

Jena, Physikalisches Institut der Universität.

1) C. Schmidt, Diss. Göttingen 1911. p. 52.

2) W. Voigt, Abh. Gött. Ges. 36 und 38.

(Eingegangen 5. April 1914.)

5. *Theorie der Hiebtöne;* *von F. Krüger und A. Lauth.*

Unter Hiebtönen mögen allgemein die Töne verstanden werden, die beim Schlagen eines Stabes durch die Luft oder beim Vorbeiströmen von Luft an Stäben oder Drähten auftreten. Auf den Mechanismus dieser einfachsten Art von Tönen, die beim Auftreffen einer Luftströmung auf Hindernisse entstehen, ist erst etwas Licht gefallen, seit der periodische Charakter der Wirbelbildung an Hindernissen sowohl in Flüssigkeiten¹⁾ wie auch in Gasen²⁾ beobachtet und untersucht ist. So hat Hr. C. Runge³⁾, ferner die Herren W. Kaufmann und H. Barkhausen⁴⁾ darauf hingewiesen, daß diese Töne auf die periodische Ablösung von Wirbeln zurückzuführen sein dürften. Eine eigentliche, quantitativ durchgeführte Theorie steht jedoch noch aus; sie soll im folgenden unter Heranziehung der grundlegenden Berechnungen Hrn. v. Kármáns⁵⁾ und der Beobachtungen von Hrn. Rubach⁶⁾ gegeben werden.

Die Diskontinuitätsfläche zwischen der strömenden und der ruhenden oder richtiger weniger schnell strömenden Flüssigkeit hinter einem Hindernis ist, wie schon Helmholtz⁶⁾ zeigte, stets labil. Nach Lord Kelvin⁷⁾ kann sie als

1) H. Bénard, Compt. rend. 147. p. 839. 1908; 156. p. 1003 u. 1225. 1913; vgl. ferner Technical Report of the advisory committee for aeronautics 1911.

2) G. v. d. Borne, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt 3. p. 30. 1912.

3) C. Runge in der Arbeit Th. v. Kármán u. H. Rubach, Phys. Ztschr. 13. p. 54. 1912.

4) W. Kaufmann, H. Barkhausen in der Diskussion zu dem Vortrage von W. König, Phys. Zeitschr. 13. p. 1054. 1912.

5) Th. v. Kármán, Göttinger Nachr. p. 547. 1912; Th. v. Kármán u. H. Rubach, Phys. Zeitschr. 13. p. 49. 1912.

6) H. v. Helmholtz, Ges. Werke, Bd. I, p. 146.

7) Lord Kelvin, Math. and phys. papers 4. p. 215.

eine Wirbelschicht aufgefaßt werden, deren Labilität sich in der Tendenz zeigt, sich zu einzelnen isolierten Wirbelfäden aufzurollen. Die Beobachtung ergibt nun, daß bei der Strömung hinter einem Körper abwechselnd rechts und links drehende Wirbel abgelöst werden, wie dies die nachstehende Fig. 1 zeigt, die von Hrn. Rubach bei einer Beleuchtungs-

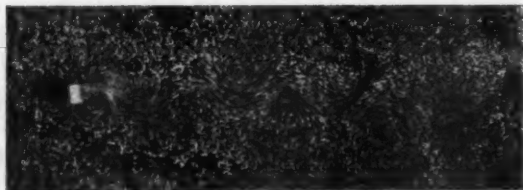


Fig. 1.

dauer von $\frac{1}{10}$ Sekunde photographisch aufgenommen ist. Hierbei wurde der Körper durch die ruhende Flüssigkeit geschleppt. Diese Verhältnisse veranlaßten Hrn. v. Kármán, die Stabilität eines solchen Wirbelsystems zu untersuchen. Er zeigte unter Beschränkung auf das Problem der ebenen Strömung, daß es nur zwei Anordnungen zweier Reihen paralleler geradliniger

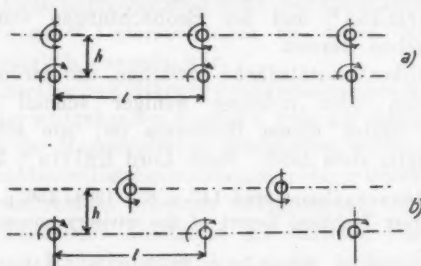


Fig. 2.

Wirbelfäden von gleicher Wirbelstärke und entgegengesetztem Drehungssinn gibt, bei denen das ganze Gebilde gleichförmig fortschreitet, eine, bei der je zwei Wirbel einander gegenüberstehen (Anordnung a) der Fig. 2, die der Arbeit von v. Kármán und Rubach entnommen ist) und eine zweite, bei der die Wirbel der einen Reihe um den halben Wirbelabstand

gegen die der zweiten Reihe verschoben sind (Anordnung *b*) in Fig. 2). Bei beiden Anordnungen hat jeder Wirbelfaden dieselbe Geschwindigkeit in der Strömungsrichtung x und in der dazu senkrechten y -Richtung die Geschwindigkeit Null; beide Gebilde würden also unverändert fortschreiten. Hr. v. Kármán bewies nun, daß die Anordnung *a*) stets labil, dagegen die Anordnung *b*) stabil ist für einen ganz bestimmten Wert des Verhältnisses des Abstandes h der beiden Wirbelreihen zu dem Abstand l zweier aufeinander folgender Wirbel derselben Reihe. Die Strömungslinien dieser Anordnung zeigt Fig. 3. Diese stabile Anordnung der abwechselnden Wirbel-

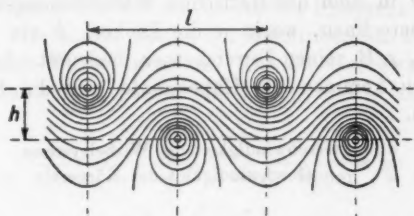


Fig. 3.

stellung entspricht ganz der beobachteten, wie sie z. B. Fig. 1 wiedergibt. Im ersten Moment der Entstehung der Wirbel, wenn der Körper sich in Bewegung setzt oder umgekehrt die Flüssigkeit zu strömen beginnt, rollt sich die Trennungsschicht hinter dem Körper symmetrisch zu zwei Wirbeln zusammen, bald aber tritt irgendeine kleine Störung ein und nun stellt sich die stabile Anordnung der abwechselnd angeordneten Wirbel ein; die Wirbel lösen sich nun abwechselnd rechts und links ab, die Flüssigkeit pendelt hin und her.

Für das Verhältnis h/l berechnet sich in einiger Entfernung hinter dem Hindernis in guter Übereinstimmung mit der Beobachtung der Wert 0,283. Die Flüssigkeit ist bei diesen Berechnungen als reibungsfrei vorausgesetzt, das Wirbelsystem würde hiernach also bei fortdauernder Bewegung des Körpers unendlich lang werden müssen; in Wirklichkeit bildet sich natürlich infolge der vorhandenen Reibung nur ein Wirbelschwanz von endlicher Länge. Die Geschwindigkeit dieses Wirbelsystems ist eine andere als die des bewegten Körpers, resp. der

strömenden Flüssigkeit. Hat der Körper die Geschwindigkeit U , so besitzt das Wirbelsystem eine kleinere Geschwindigkeit u , die Relativgeschwindigkeit des Wirbelsystems gegenüber dem Körper ist also $U - u$; ruht umgekehrt der Körper und strömt an ihm die Flüssigkeit vorbei, so hat das Wirbelsystem die Geschwindigkeit u in der strömenden Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit U , wiederum ist also die Ablösungsgeschwindigkeit des Wirbelsystems hinter dem Hindernis $U - u$. Diese Geschwindigkeitsdifferenz geht in den Widerstand ein, den der bewegte oder umströmte Körper erfährt. Unter Anwendung des Impulssatzes konnte nun Hr. v. Kármán die Widerstandskonstante ψ in dem quadratischen Widerstandsgesetz $W = \psi \cdot \rho \cdot D \cdot U^2$ berechnen, worin ρ die Dichte, D ein Bezugsmaß des Körpers, z. B. seinen Durchmesser, bedeutet. In dem Ausdruck für ψ kommen als Unbekannte nur die beiden Verhältniszahlen

$$\frac{u}{U} = \frac{\text{Geschwindigkeit des Wirbelsystems}}{\text{Geschwindigkeit des Körpers}}$$

und

$$\frac{l}{D} = \frac{\text{Abstand der einzelnen Wirbel}}{\text{Durchmesser des Körpers}}$$

vor. Beide Größen können theoretisch bisher nicht berechnet werden, sie müssen aber, soweit die Ähnlichkeitsgesetze gelten, Konstanten sein, die bei gegebenem Durchmesser D nur noch von der Körperform abhängen, z. B. für einen Zylinder und eine Platte von gleichem Durchmesser D verschieden sind. Für eine bestimmte Körperform sind sie also jedesmal experimentell zu bestimmen. Die Werte für l/D und zwar für einen zylindrischen Körper und eine Platte entnahm Hr. v. Kármán aus den photographischen Aufnahmen, das Verhältnis u/U bestimmte er aus der gemessenen Zahl der pro Zeiteinheit entstehenden Wirbel. Die so aus den Wirbelbildern des Wassers berechnete Widerstandsziffer ψ stimmt sowohl für den Zylinder wie für den Stab mit den für den Luftwiderstand gefundenen Werten innerhalb weniger Prozente, also innerhalb der Genauigkeitsgrenze der provisorischen Konstantenbestimmungen der Flüssigkeitswirbel überein. Die notwendige Voraussetzung dieses Resultates, daß die Bewegungen in Gasen unter die volumbeständigen Flüssigkeitsbewegungen einzureihen sind, trifft

zu, solange die Geschwindigkeit klein gegen die Schallgeschwindigkeit ist.¹⁾

Diese konstanten Verhältniszahlen u/U und l/D mögen für den Fall eines zylindrischen Stabes, wie er für die Hiebtöne in Frage kommt, die Werte a und b haben. Die Konstanz von l/D besagt übrigens noch, daß der Wirbelabstand für eine gegebene Stabdicke unabhängig von der Geschwindigkeit ist, ein Gesetz, das schon Hr. Bénard (l. c.) auf Grund seiner Experimente über die Wirbelbildung hinter Hindernissen aufgestellt hat. Sehen wir nun nach dem in der Einleitung Gesagten die Entstehungsursache der Hiebtöne in der wechselseitigen Ablösung der Wirbel, so ist die Frequenz N der Hiebtöne durch die Anzahl der in der Zeiteinheit auf beiden Seiten sich bildenden Wirbel gegeben. Da die Geschwindigkeit des Wirbelsystems relativ zum Stabe gleich $U - u$ ist, so wird

$$N = \frac{U - u}{l}.$$

Da $u/U = a$, also $U - u = U(1 - a)$, ferner $l = b \cdot D$, so ist

$$N = \frac{U(1 - a)}{D \cdot b}.$$

Diese Formel sagt aus, daß die Frequenz der Hiebtöne der Geschwindigkeit der Luft oder der des Stabes direkt, dem Durchmesser des letzteren umgekehrt proportional ist. Der Ausdruck

$$\frac{N \cdot D}{U} = \frac{1 - a}{b}$$

muß also konstant sein. Nach den Messungen von v. Kármán und Rubach ist für einen zylindrischen Stab $a = 0,14$, also $(1 - a) = 0,86$, ferner $b = 4,3$, mithin

$$\frac{N \cdot D}{U} = \frac{0,86}{4,3} = 0,20.$$

Mittels dieser für die Flüssigkeitsströmung um einen zylindrischen Stab charakteristischen Konstanten muß also die Höhe der Hiebtöne zu berechnen sein.

Die Forderungen der Theorie lassen sich prüfen an einer ausgezeichneten experimentellen Arbeit Strouhals²⁾, die auf

1) Siehe L. Prandtl, Artikel „Flüssigkeitsbewegung“ im Handwörterbuch der Naturwissenschaften, Bd. III. p. 102. Jena 1913.

2) V. Strouhal, Wied. Ann. 5. p. 216. 1878.

Veranlassung von F. Kohlrausch ausgeführt wurde. Strouhal untersuchte die Töne, welche entstehen, wenn ein zur Drehachse paralleler Stab mit gleichmäßiger Geschwindigkeit rotiert. Fig. 4 gibt eine Skizze seiner Versuchsanordnung. Ein senkrecht zur Achse stehender und rotierender Stab würde statt eines reinen Tones ein kontinuierliches Spektrum von Tönen liefern, da die verschiedenen Teile des Stabes verschiedene Geschwindigkeiten besitzen würden.

Die Länge der Stäbe oder Drähte betrug bei den meisten Versuchen 70 cm, der Abstand von der Drehachse 40 cm. Die

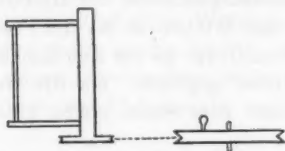


Fig. 4.

Drahtdicke lag zwischen ca. 3 mm und 0,2 mm, die Geschwindigkeit zwischen 12 m und 2 m pro Sekunde.

Die mit Hilfe eines Monochords bestimmte Tonhöhe erwies sich, wie das die Theorie verlangt, als unabhängig von der Spannung wie von der Länge des Drahtes; die Tonstärke stieg mit der letzteren an. Das Material der Stäbe war natürlich auch belanglos; es wurden Stäbe aus Glas, ferner Kupfer- und Messingdraht verwandt.

In Übereinstimmung mit der Theorie ergab sich die Tonhöhe N der Geschwindigkeit U proportional, wie z. B. folgende Tabelle für einen Kupferdraht von der Dicke 1,648 mm zeigt:

Tabelle 1.

U in m/sec	N	$\frac{N}{U}$
4,62	521	112,8
5,58	622	112,2
7,45	834	112,0
9,27	1042	112,4

Für dünne Drähte zeigt allerdings das Verhältnis N/U einen kleinen Gang und zwar nimmt es mit wachsendem U

ein wenig zu, wie folgende Zahlen für einen Draht der Dicke $D = 0,638$ mm beweisen:

Tabelle 2.

U in m/sec	N	$\frac{N}{U}$
6,05	1668	276
7,36	2085	283
8,91	2502	281
11,75	3336	290

Strouhal weist darauf hin, daß diese Abweichungen wahrscheinlich durch die Mitführung der Luft zu erklären sind; es soll weiter unten hierauf näher eingegangen werden. Sieht man zunächst von diesen Abweichungen bei den dünnen Drähten ab und bildet den Mittelwert der einzelnen N/U -Werte für eine bestimmte Drahtdicke, so zeigt sich, daß der Quotient N/U , wie es die Theorie verlangt, der Dicke des Drahtes umgekehrt proportional ist. Die Tonhöhe ist also bei gegebener Geschwindigkeit U der Dicke D umgekehrt proportional.

Tabelle 3.

D in mm	Mittelwerte von $\frac{N}{U}$ (U in mm)	$\frac{N \cdot D}{U}$
8,510	0,0222	0,189
3,254	0,0611	0,199
2,736	0,0710	0,194
1,648	0,1123	0,185
1,217	0,1562	0,190
0,960	0,1982	0,190
0,733	0,2275	0,167
0,638	0,2825	0,180
0,622	0,3030	0,188
0,394	0,4450	0,175
0,385	0,4580	0,176

Die Werte für den Ausdruck $N \cdot D/U$ für die verschiedenen Drahtdicken gibt die vorstehende Tabelle wieder, in der die

Geschwindigkeit U im selben Maße wie die Dicke D und zwar in Millimetern ausgedrückt sind.

Der Ausdruck $N \cdot D/U$ ist also in der Tat sehr nahe konstant. Sehen wir von den Zahlen für die beiden dünnsten Drähte, bei denen sich die erwähnte Störung stärker bemerkbar macht, ab, so ergibt sich als Mittelwert 0,187. Er stimmt mit dem oben theoretisch berechneten Wert 0,20 wohl innerhalb der Fehlergrenzen überein, denn die dort benutzten Konstanten a und b sind nicht mehr als auf einige Prozente genau.

Die Geschwindigkeiten sind infolge der Mitführung der Luft jedenfalls etwas kleiner als sich aus der Rotationsgeschwindigkeit berechnet. Strouhal zeigte dies in der Weise, daß er unter sonst gleichen Umständen die Beobachtungen erstens bei kleinem und zweitens bei größerem Abstand des Drahtes von der Drehachse anstellte. Bei gleicher Drahtgeschwindigkeit wird natürlich bei kleinem Abstand die Luft stärker mitgenommen werden, da hier die Winkelgeschwindigkeit größer sein muß. Dementsprechend ist die wirkliche Geschwindigkeit hier kleiner als bei größerem Abstand und somit die Tonhöhe geringer. Die folgende Tab. 4 gibt für einen Messingdraht von der Dicke 0,386 mm ein paar Beispiele hierfür:

Tabelle 4.

U in m/sec	N bei einem Abstand von der Drehachse von	
	32,7 cm	35,8 cm
2,95	1062	1083
4,05	1593	1632

Wie aus Tab. 3 hervorgeht, sind die Abweichungen des Ausdrucks $N \cdot D/U$ von dem theoretischen Wert am größten für die dünnsten Drähte. Eine bessere Anschauung hiervon gibt die nebenstehende Fig. 5, die der Arbeit von Strouhal entnommen ist.

In ihr sind als Abszissen die Geschwindigkeiten U in Meter pro Sekunde und als Ordinaten die Schwingungszahlen N für die verschiedenen Drahtdicken D eingetragen. Die N - U -Kurven für die dicksten Drähte sind entsprechend der Theorie gerade Linien, die durch den Koordinatenanfangspunkt

gehen. Die Kurven für die mitteldicken Drähte wie auch für die dünnen Drähte nähern sich ebenfalls in dem Teil, der größeren U -Werten entspricht, mehr und mehr Geraden, deren Verlängerungen aber nicht durch den Koordinatenanfangspunkt gehen. Da für $U=0$ auch $N=0$ sein muß, so sind die Kurven für die dünnen Drähte zweifellos gekrümmt, diese Geraden stellen also Asymptoten an die eigentlichen U - N -

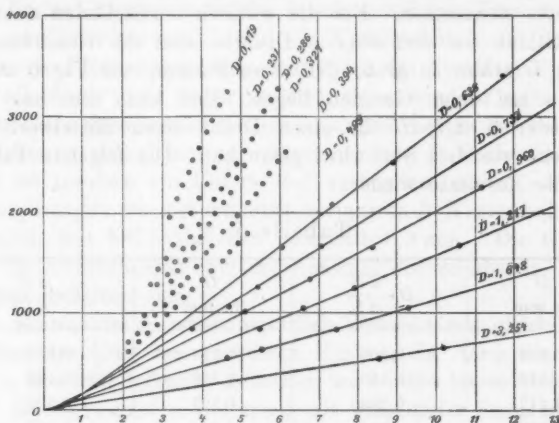


Fig. 5.

Kurven dar. Die Steigung $\operatorname{tg} \alpha$ dieser Asymptoten ist um so steiler, je kleiner der Durchmesser D ist.

Die von der Theorie verlangte Proportionalität zwischen der Schwingungszahl N und der Geschwindigkeit U ist also für die dünnen Drähte erst bei den größten Geschwindigkeiten vorhanden; die Beziehung $N \cdot D/U = \text{konst.}$ würde demnach den diesen Asymptoten parallelen Geraden, die durch den Koordinatenanfangspunkt gehen, entsprechen. Die Gleichung der Kurven selbst würde nach Strouhal etwa die Form

$$N = \frac{\text{konst.}}{D} (U - f(U))$$

haben, worin $f(U)$ mit steigender Geschwindigkeit U einem endlichen positiven Grenzwert sich nähern würde. Dann würde also die Tangente für große Werte von U

$$\frac{dN}{dU} = \frac{\text{konst.}}{D} (1 - f(U)) = \frac{\text{konst.}}{D},$$

also

$$D \cdot \frac{dN}{dU} = D \cdot \frac{N}{U} = \text{konst.} = \frac{1-a}{b}.$$

Statt N/U wäre dann also die Tangente dN/dU für große U -Werte einzusetzen. Für die wirklich beobachteten Schwingungszahlen bei den dünnen Drähten sind die Geschwindigkeiten U schon so groß, daß diese Punkte, wie Fig. 5 zeigt, nahezu auf einer Geraden liegen. Man kann also aus den Einzelwerten dN/dU für einen Draht einen Mittelwert berechnen, wie dies Strouhal getan hat. Die folgende Tab. 5 gibt die Resultate wieder:

Tabelle 5.

D in mm	$D \cdot \frac{dN}{dU}$	D in mm	$D \cdot \frac{dN}{dU}$
3,254	0,205	0,394	0,191
1,648	0,185	0,386	0,190
1,217	0,199	0,327	0,200
0,960	0,194	0,286	0,187
0,733	0,193	0,231	0,165
0,638	0,184	0,179	0,156
0,622	0,196		
0,499	0,200		

Mit Ausnahme der Werte für die beiden dünnsten Drähte ist der Ausdruck $D \cdot dN/dU$ fast völlig konstant. Der Mittelwert unter Ausschluß der beiden letzten Zahlen ist 0,194, er stimmt mit dem theoretisch berechneten Wert 0,200 innerhalb der Fehlergrenzen völlig überein.

Der Grund für das Auftreten der Funktion $f(U)$ wird zum Teil wohl in der Mitführung der Luft durch die Drähte und die Drahthalter liegen. Daß dies jedoch der einzige Grund ist, ist recht zweifelhaft, wenn nicht sehr unwahrscheinlich; denn es ist nicht zu verstehen, warum ihr Einfluß gerade bei den dünnen Drähten am größten ist. So sind die abweichenden Werte für die beiden dünnsten Drähte auch wohl kaum

darauf zurückzuführen, daß die zur Berechnung benutzten Werte noch nicht hinreichend großen Geschwindigkeiten entsprächen. Es dürfte vielmehr wohl noch eine andere störende Ursache vorhanden sein, die vielleicht in der Richtung zu suchen ist, daß bei zu kleinem Drahtdurchmesser der kleine Abstand der Wirbelreihen, vielleicht auch der einzelnen Wirbel, ihre Entstehungsbedingungen beeinflußt.

Darauf deuten auch die bereits erwähnten Versuche von Bénard über die Ausbildung von Wirbelreihen hinter Hindernissen in Flüssigkeiten hin, nach denen das Verhältnis l/D für ein allerdings nicht kreiszylinderförmiges, sondern mehr langgestrecktes Hindernis in Wasser schon bei Werten der Breite D zwischen 4 und 1 mm mit abnehmendem D stark zunimmt. Nur ist insofern ein Unterschied vorhanden, als in Luft die Abweichungen erst bei erheblich geringeren D -Werten beginnen, nämlich erst bei Stabdicken unterhalb 0,3 mm. Die Gründe für die Abweichungen von der Konstanz dürften aber in beiden Fällen dieselben sein.

Einwandfreier wären natürlich Versuche mit gleichförmig strömender Luft bei ruhendem Körper, da dann die wirkliche Geschwindigkeit U gemessen wird. Sie lassen sich aber nur in einem großen Luftkanal mit wirbelfreier Strömung anstellen.

Strouhal konstatierte noch einen Einfluß der Temperatur auf die Tonhöhe; bei einer Steigerung der Lufttemperatur um 20—30° fand er eine Abnahme der Schwingungszahlen um etwa 5 Proz. Die Versuche wurden mit ein paar dünnen Drähten angestellt und gestatten, wie Strouhal selbst bemerkt, keine quantitativen Schlüsse. Es ist sehr wahrscheinlich, daß diese Temperaturabhängigkeit durch die mit der Temperatur veränderte Mitführung der Luft bedingt ist. Da die innere Reibung der Luft mit steigender Temperatur zunimmt, so muß auch die Mitführung wachsen. Die Geschwindigkeit wird also stärker verkleinert als bei tiefer Temperatur und demgemäß die Tonhöhe kleiner gefunden werden. Eine andere als eine solche sekundäre Temperaturabhängigkeit ist ja nach der Theorie nicht zulässig.

Die Hiebtöne können, wie Strouhal zeigte, den Draht zum Schwingen erregen, falls die Frequenz des Hiebtönes mit

der des Eigentons des Drahtes oder eines Obertons desselben zusammenfällt. Diese Resonanztöne bezeichnet Strouhal als „Drahttöne“. Sie sind viel lauter als die bloßen Hiebtöne. Mit der Strouhalschen Vorrichtung kann man sie leicht demonstrieren, falls man den Apparat langsam anlaufen läßt und, wenn Resonanz eingetreten ist, für Konstanz der Rotationsgeschwindigkeit Sorge trägt. Zu diesen „Drahttönen“ gehören auch die Töne der Äolsharfen und das Summen der Telegraphendrähte.

Die Intensität der Hiebtöne wächst, wie schon erwähnt, mit der Länge des Drahtes, sie wird ihr wahrscheinlich direkt proportional sein. Auf die Längeneinheit bezogen hängt die Tonstärke aber auch noch von der Geschwindigkeit U und der Drahtdicke D ab. Die Stärke der Stauung resp. Dilatation bei der Wirbelablösung dürfte die Tonintensität bedingen, für sie wird die Wirbelstärke Γ ein Maß sein. Da nun nach Hrn. v. Kármán $\Gamma = \sqrt{8} \cdot l \cdot u$ und der Wirbelabstand $l = b \cdot D$ andererseits $u = a U$, so muß $\Gamma = \text{konst. } U \cdot D$ sein.

Sofern wir also die Tonintensität der Wirbelstärke proportional setzen dürfen, muß sie proportional der Geschwindigkeit und der Drahtstärke ansteigen. Die Zunahme mit der Geschwindigkeit ist zweifellos und leicht zu konstatieren, nähere Messungen darüber aber fehlen noch.

Sind also auch ergänzende Messungen nach verschiedenen Richtungen noch wünschenswert, so dürfte doch die quantitative Berechnung der Tonhöhe der Hiebtöne aus den Konstanten der Wirbelbildung in Wasser die Zurückführung der Tonbildung auf die Wirbelablösung sicher erwiesen haben.

Danzig-Langfuhr,

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 30. März 1914.)

6. Stoßweise Spitzenentladungen und die elektrische Methode der Zählung der α -Teilchen.

Erwiderung auf die gleichlautende Arbeit der Herren L. Myssowsky und K. Nesturch; von H. Geiger.

Vor kurzem haben die Herren Myssowsky und Nesturch in dieser Zeitschrift¹⁾ einige Versuche veröffentlicht, auf Grund deren sie unter anderem zu dem Schluß kommen, daß die von mir kürzlich angegebene Methode zur Zählung von α - und β -Strahlen unrichtig ist. Wie ich in den Verhandlungen der D. phys. Ges. näher auseinandergesetzt habe, beruht diese Zählmethode darauf, daß jedes in der Nähe einer negativ geladenen Spitze vorbeifliegende α - oder β -Teilchen eine Entladung auslöst, die an dem mit der Spitze verbundenen Faden-elektrometer einen kräftigen Ausschlag hervorruft.²⁾ Die Herren Myssowsky und Nesturch sind nun der Ansicht, daß diese Ausschläge nicht der Wirkung einzelner α -Teilchen zukommen, sondern „daß die Entladungen von den Eigenheiten der Spitze, aber nicht von denjenigen der Ionisation oder gar den einzelnen α - und β -Teilchen abhängen“. Da die Herren Myssowsky und Nesturch Zählversuche nach meiner Methode überhaupt nicht ausgeführt haben, sondern sich nur auf Versuche anderer Art stützen, so erscheint mir ihr absprechendes Urteil ungerechtfertigt.

Die Herren wenden zunächst ein, daß der Zählapparat auch bei γ -Strahlen diskontinuierliche Entladungen anzeigte. Wie aus meiner Arbeit hervorgeht, rührt dies daher, daß die γ -Strahlen nicht direkt ionisieren, sondern an den Wänden des Zählers sekundäre β -Strahlen auslösen, die dann durch das Elektrometer registriert werden. Die Herren sehen ferner eine Bestätigung ihrer Ansicht darin, daß „sowohl für α - wie auch

1) L. Myssowsky u. K. Nesturch, Ann. d. Phys. **43**, p. 461. 1914.

2) H. Geiger, Verhdlgn. d. D. phys. Ges. **15**, p. 534. 1913.

β -Teilchen bei bestimmter Spannung die Ablenkungen des Saitenelektrometers der Größe und Häufigkeit nach die gleichen waren“. Dies ist allerdings nach der von mir mitgeteilten Tabelle richtig; rührt aber daher, daß der Abstand und die Stärke des Präparats so gewählt wurde, daß in beiden Fällen eine zur Zählung geeignete Zahl von Teilchen in den Apparat eintrat. Im übrigen spricht gerade der Umstand, daß die beiden Präparate die gleiche Zahl von Ausschlägen gaben gegen die Anschauung der Herren Myssowsky und Nesturch. Wie aus meinen Angaben hervorgeht, erzeugte nämlich das β -Strahlenpräparat eine ca. 100mal kleinere Ionisation als das α -Strahlenpräparat. Wenn daher nur die Ionisation für die Zahl der Ausschläge bestimmend wäre, so müßte diese Zahl bei dem α -Strahlenpräparat ca. 100mal so groß sein wie bei dem β -Strahlenpräparat, was aber nicht im entferntesten der Fall ist.

Daß man durch die beschriebene Methode tatsächlich die individuellen Strahlenteilchen zählt, ergibt sich aus folgendem Versuch, der mir bei richtiger Ausführung einwandfrei erscheint. Man läßt die α -Teilchen einer sehr schwachen Strahlenquelle zwei hintereinander gestellte Zählapparate durchlaufen, deren Spitzen mit zwei gleichartigen Meßinstrumenten verbunden sind. Nach der Ansicht der Herren Myssowsky und Nesturch würde dann zwar an beiden Instrumenten die Häufigkeit der Ausschläge ungefähr dieselbe sein; die Ausschläge könnten aber zeitlich nicht zusammenfallen. Reagieren die Zählapparate aber wirklich auf die individuellen Teilchen, so müßten die Ausschläge an beiden Meßinstrumenten stets gleichzeitig eintreten. In der Tat zeigt sich bei richtiger Anordnung, daß dies nahezu ausnahmslos der Fall ist. Ganz unabhängig von jeder Vorstellung, die man sich über die Wirkungsweise des Zählapparates machen mag, beweist dieser Versuch unzweideutig, daß die Ausschläge von den einzelnen Teilchen herrühren und daß jedes Teilchen wirksam ist.

Ferner wenden sich die Herren Myssowsky und Nesturch auch gegen die ersten elektrischen Zählversuche von Rutherford und mir. Sie kommen auf Grund ihrer Versuche ebenfalls zu dem Schluß, daß die beobachteten Ausschläge nur „natürliche Störungen“ sind und in keinem Zusammenhang mit den einzelnen α -Teilchen stehen. Den Herren Verfassern ist

es anscheinend nicht gelungen, die richtigen experimentellen Bedingungen für die Zählungen zu erhalten. Es spricht wohl schon allein die gute Übereinstimmung des damals gefundenen Zahlenwertes mit dem später durch Szintillationsversuche erhaltenen Wert ausreichend für die Richtigkeit der ersten Versuche.

Charlottenburg, April 1914.

Physikalisch-Technische Reichsanstalt.

(Eingegangen 10. April 1914.)

7. Fabrikmäßige Darstellung von Merkurosulfat für Normalelemente.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Auf Anregung der Reichsanstalt hat sich die Firma „E. de Haën, Chemische Fabrik ‚List‘ G. m. b. H. in Seelze bei Hannover“ der Mühe unterzogen, Merkurosulfat für Normalelemente in größeren Mengen herzustellen unter Beachtung der ihr zu diesem Zweck gegebenen Anweisungen der Reichsanstalt.

Das Merkurosulfat wird unter einer gesättigten Lösung von Cadmiumsulfat aufbewahrt, so daß es zur Verwendung in Weston-Normalelementen (mit gesättigter Lösung) ohne weiteres zu verwenden ist und kann in Flaschen zu $\frac{1}{2}$ kg, welche in der Reichsanstalt plombiert sind; von der Firma zum Preise von 50 Mk. pro Flasche bezogen werden.

Bekanntlich ergibt das im Handel bezogene Merkurosulfat abweichende Werte der E.M.K.,¹⁾ während nach der von Hrn. v. Steinwehr angegebenen Fällungsmethode²⁾, die auch von der Firma de Haën befolgt worden ist, ein stets gleichbleibendes Präparat erhalten wird. Der gesamte von der Firma hergestellte Vorrat wird der Reichsanstalt zugestellt und durch Herstellung von Probeelementen, die zwei bis drei Monate unter Beobachtung gehalten werden, auf sein Verhalten in elektrochemischer Hinsicht geprüft.

Die Firma erhält dann das Präparat in plombierten Flaschen zum Verkauf zurück, so daß jede Gefahr einer Verwechselung ausgeschlossen ist.

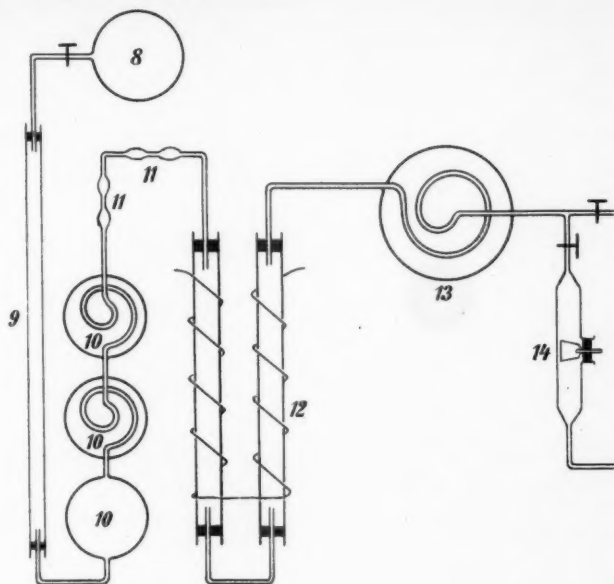
1) Zeitschr. f. Instrumentenk. 21. p. 76. 1901.

2) Zeitschr. f. Instrumentenk. 25. p. 205. 1905.

(Eingegangen 6. Mai 1914.)

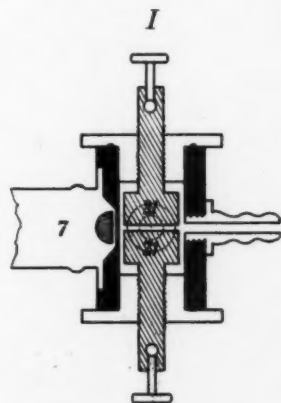
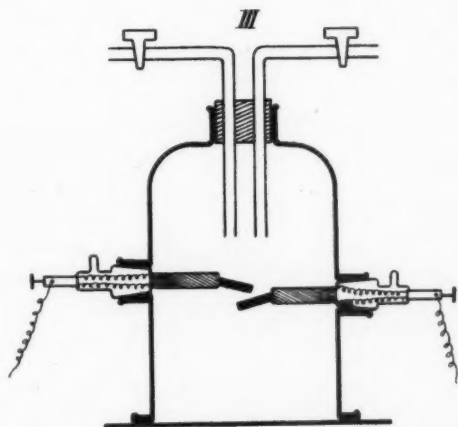
Berichtigung.

- W. v. Ignatowsky, Zur Theorie der Gitter, Ann. d. Phys. 44. 1914:
 p. 396, 4. Zeile von unten statt U_n, U_n' , muß es sein u_n, u_n' ,
 p. 429, Formel (6) statt $i D_0 - D_1$, muß es sein $i D_0 + D_1$,
 p. 433, Anmerkung statt E. Jahnke und F. Grude, muß es sein E. Jahnke und F. Emde.



Optischer Teil.

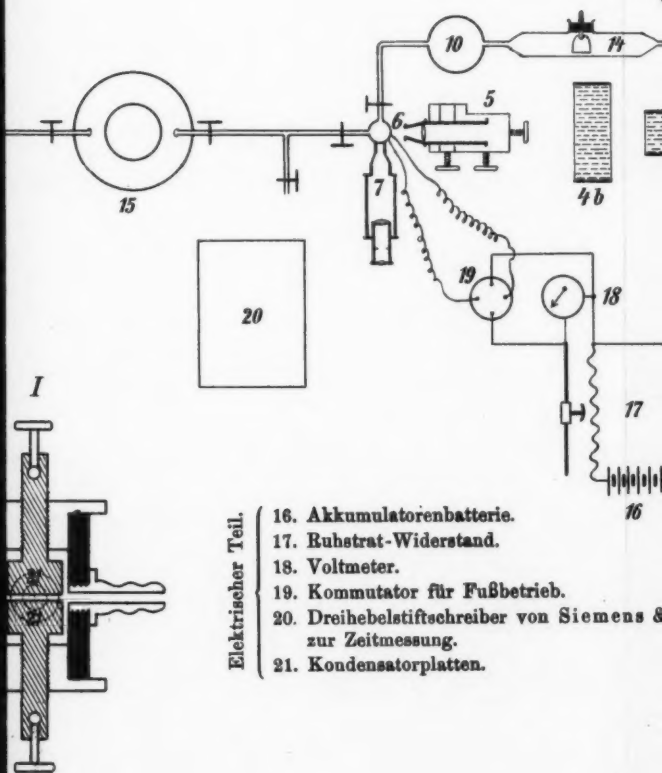
1. Bogenlampe.
2. Blende.
3. Sammellinse.
- 4 a und b. Kühlungen
5. Beleuchtungsobjekt
6. Kondensator (hier
7. Mikroskop (Obj. A
- Zeiss), durch 8
- schrauben exakt h



Elektrischer Teil.

Optischer Teil.

1. Bogenlampe.
2. Blende.
3. Sammellinse.
- 4 a und b. Kühlungen (H_2O und $CuSO_4$).
5. Beleuchtungsobjektiv a_1 , durch 3 Mikrometerschrauben verstellbar.
6. Kondensator (hierzu Detailskizze I).
7. Mikroskop (Obj. A A, Okular IV oder 12 von Zeiss), durch 3 nicht eingeseichnete Stellschrauben exakt horizontal justierbar.



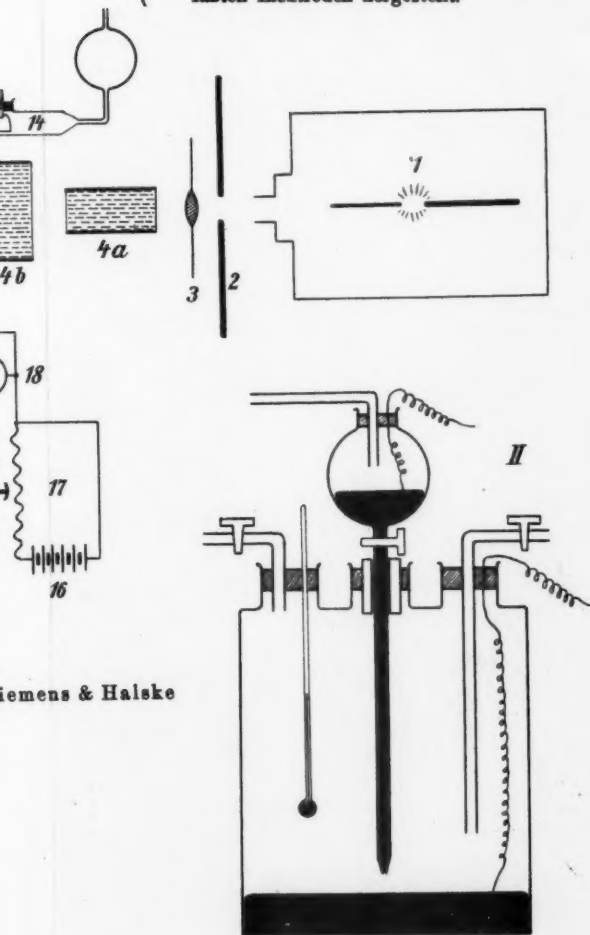
Elektrischer Teil.

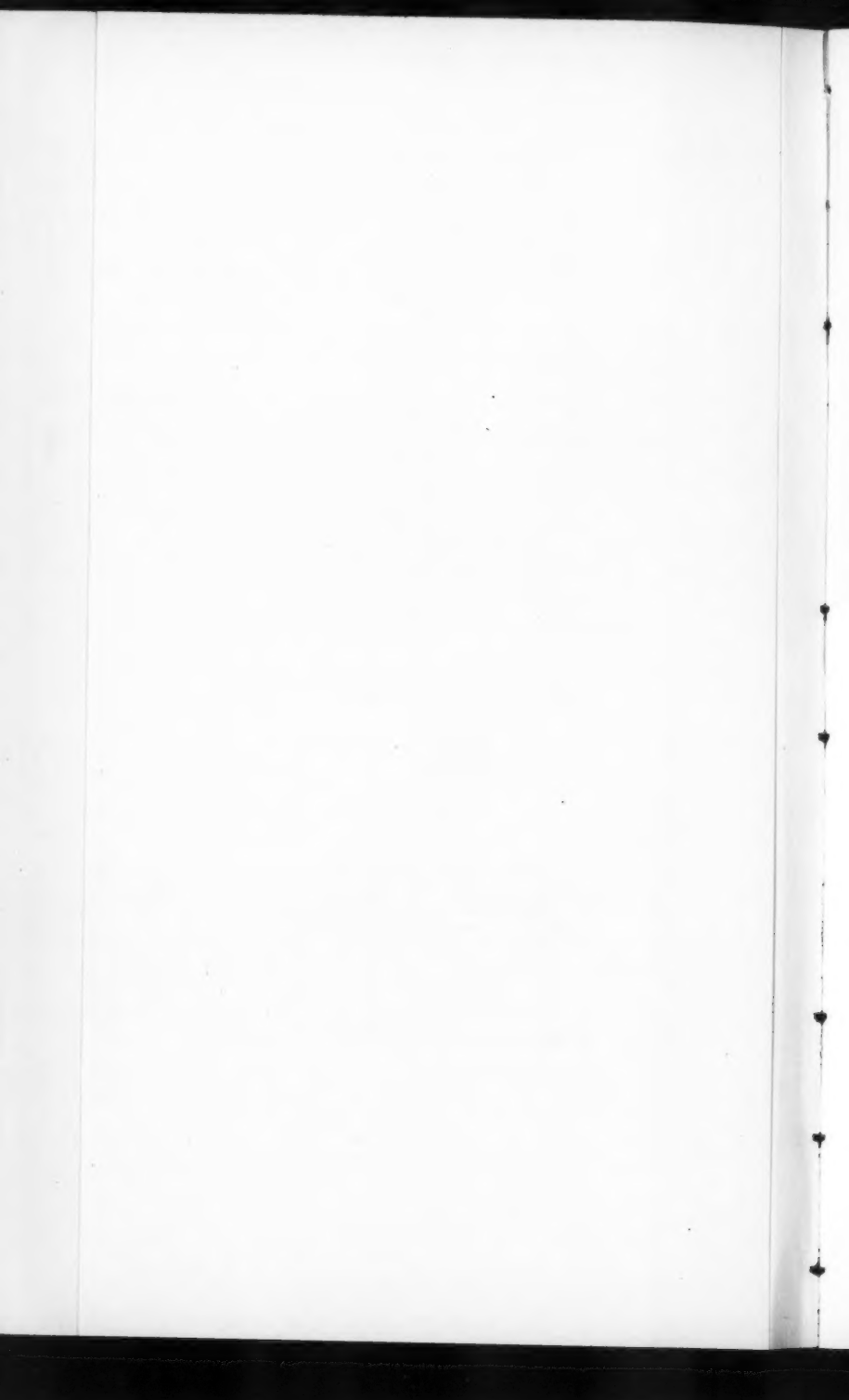
16. Akkumulatorenbatterie.
17. Ruhstrat-Widerstand.
18. Voltmeter.
19. Kommutator für Fußbetrieb.
20. Dreihebelstiftschreiber von Siemens & zur Zeitmessung.
21. Kondensatorplatten.

F. Ehrenhaft.

Gasreinigung.

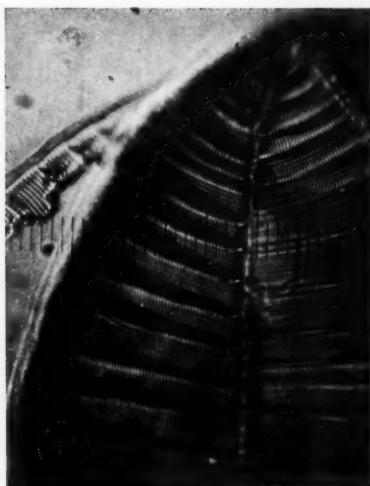
8. Stickstoffbombe mit Reduzierventil.
9. Rohr mit Na_2O .
10. H_2SO_4 -Trocknung.
11. U-Rohre mit P_2O_5 .
12. Elektrischer Ofen (zum Entziehen des Sauerstoffes).
13. H_2O -Kühlung.
14. Gefäß mit blankem Natrium; dieses von außen mit einem Glasmesser ausschneidbar.
15. Zerstäubergefäß (II für Quecksilber, III für Edelmetalle); der Lichtbogen wird bei letzterem durch Drehen der in eingeriebenen Glasstöpseln gefaßten Elektroden hergestellt.



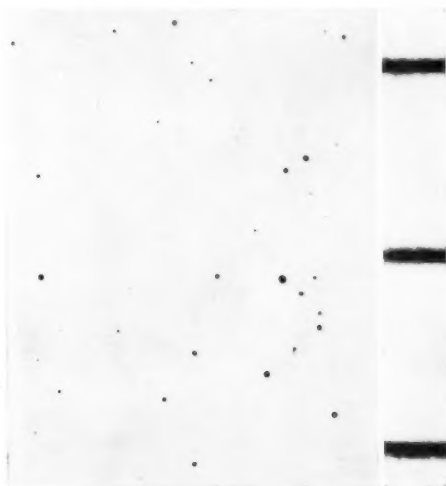




I. *Pleurosigma angulatum*.
1 Teil Okularmaßstab = $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm
1313fache Vergrößerung.



II. *Surirella gemma*.
1 Teil Okularmaßstab = $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm.
1355fache Vergrößerung.

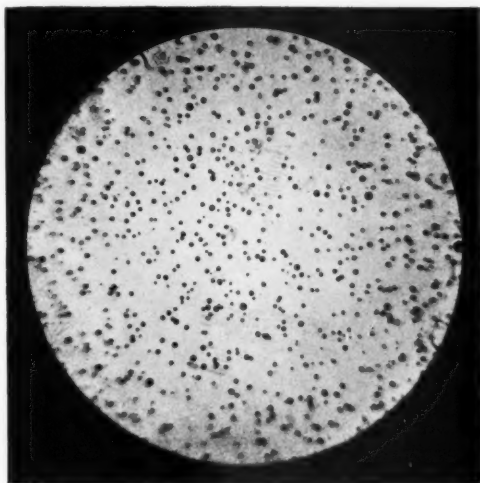


III. Silberkugeln.
1 Teil des Vergleichsmaßstabes = $1 \cdot 10^{-3}$ cm.
2860fache Vergrößerung.

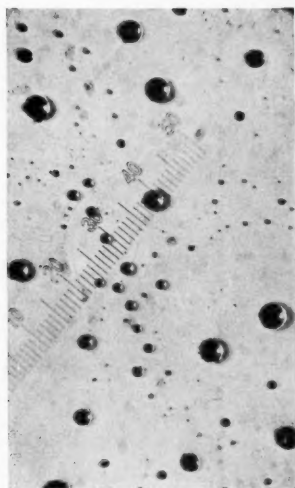


IV. Goldkugeln.
1 Teil des Vergleichsmaßstabes = $1 \cdot 10^{-3}$ cm.
780fache Vergrößerung.

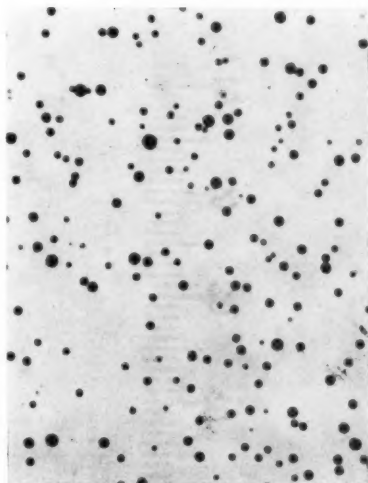




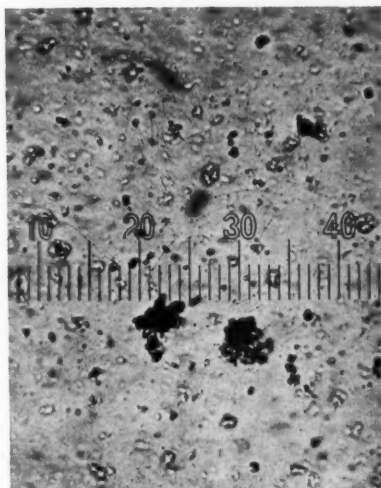
V. Quecksilberkugeln.
1 Teil Okularmaßstab = $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm.
582 fache Vergrößerung.



VI. Größere Quecksilberkugeln
bei schiefem Lichte.
1 Teil Okularmaßstab = $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm.
816 fache Vergrößerung.



VII. Quecksilberkugeln.
1 Teil Okularmaßstab = $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm.
1805 fache Vergrößerung.



VIII. Zinkwolle (nicht kugelförmig).
1 Teil Okularmaßstab = $11,5 \cdot 10^{-5}$ cm.
1805 fache Vergrößerung.

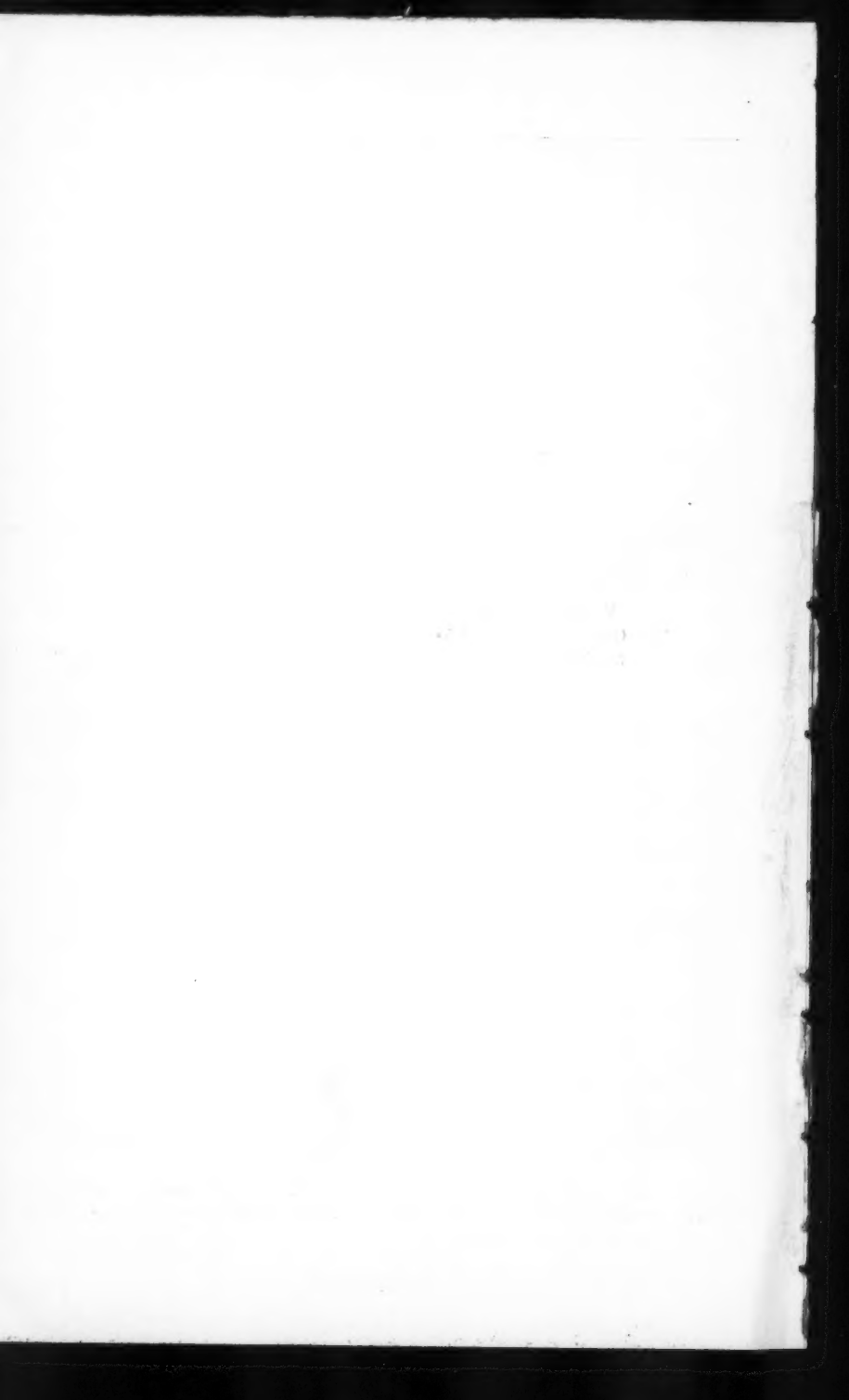




Tabelle 1. Weltlinien beschleunigter Bewegungen, welche eine verallgemeinerte Lorentztransformation zulassen.

Tafel XV.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
Wurzeln und Elementarteiler der charakteristischen Determinante der zugehörigen inf. orth. Transform.	Gleichungen der Weltlinienschar (Bahnen der Transformation des S_1)	Konstante der Transformation	Parameter der Bahnen	Parameter der Schar	Geometrische Interpretation	Bogenelement $ds^2 = -c^2 dt^2$	Quadrat der ersten Krümmung $\left(\frac{1}{R_1}\right)^2$	Quadrat der zweiten Krümmung $\left(\frac{1}{R_2}\right)^2$	Quadrat der dritten Krümmung $\left(\frac{1}{R_3}\right)^2$	Erste Invariante $\left\{\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_3}\right)^2\right\} (ds)^2$ identisch mit den Invarianten der inf. orth. Transf. $E(ds)^2$	Zweite Invariante $\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 \left(\frac{1}{R_2}\right)^2 (ds)^4$	Richtungskosinusse der Tangente (c_1)	Richtungskosinusse der Hauptnormalen (c_2)	Richtungskosinusse der Binormalen (c_3)	Richtungskosinusse der Trinormalen (c_4)
I $- \varphi_1 = \varphi_2 = i\lambda$ $- \varphi_3 = \varphi_4 = 1$ [1111]	$x^{(1)} = a \cos \lambda(u - u_0)$ $x^{(2)} = a \sin \lambda(u - u_0)$ $x^{(3)} = b \cos iu$ $x^{(4)} = b \sin iu$	λ	u	$a b u_0$	Hypersphärische Kurve: Reelle Drehung in der $x^{(1)} x^{(2)}$ -Ebene Imaginäre Drehung in der $x^{(3)} x^{(4)}$ -Ebene	$ds^2 = -(b^2 - a^2 \lambda^2) (du)^2$ wobei $b^2 - a^2 \lambda^2 > 0$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = \frac{a^2 \lambda^4 + b^4}{(b^2 - a^2 \lambda^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = -\frac{a^2 b^2 \lambda^2 (1 + \lambda^2)}{(b^2 - a^2 \lambda^2)^2 (a^2 \lambda^4 + b^4)}$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{a^2 \lambda^4 + b^4}$	$(\lambda^2 - 1) (du)^2$	$-\lambda^2 (du)^4$	$c_1^{(1)} = \frac{\lambda a \sin \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $c_1^{(2)} = \frac{\lambda a \cos \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $c_1^{(3)} = \frac{b \sin iu}{i \sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $c_1^{(4)} = \frac{b \cos iu}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$	$c_2^{(1)} = \frac{a \lambda^2 \cos \lambda(u - u_0)}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$ $c_2^{(2)} = \frac{a \lambda^2 \sin \lambda(u - u_0)}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$ $c_2^{(3)} = -\frac{b \cos iu}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$ $c_2^{(4)} = -\frac{b \sin iu}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$	$c_3^{(1)} = -\frac{b \sin \lambda(u - u_0)}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $c_3^{(2)} = \frac{b \cos \lambda(u - u_0)}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $c_3^{(3)} = -\frac{i a \lambda \sin iu}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $c_3^{(4)} = \frac{i a \lambda \cos iu}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$	$c_4^{(1)} = \frac{b \cos \lambda(u - u_0)}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$ $c_4^{(2)} = \frac{b \sin \lambda(u - u_0)}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$ $c_4^{(3)} = \frac{a \lambda^2 \cos iu}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$ $c_4^{(4)} = \frac{a \lambda^2 \sin iu}{\sqrt{b^2 + a^2 \lambda^4}}$
IIa $- \varphi_1 = \varphi_2 = i\lambda$ $- \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ [11(11)]	$x^{(1)} = a \cos \lambda(u - u_0)$ $x^{(2)} = a \sin \lambda(u - u_0)$ $x^{(3)} = x_0^{(3)} + \beta u$ $x^{(4)} = iu$	λ, β	u	$a x_0^{(3)} u_0$	Dreidimensionale gemeine Schraubenlinie in den Räumen $x^{(3)} - \beta x^{(4)} / i = \text{const}$ Reelle Drehung in der $x^{(1)} x^{(2)}$ -Ebene Imaginäre Schiebung längs einer zeitartigen Richtung	$ds^2 = -(1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2) (du)^2$ wobei $1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2 > 0$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = \frac{a^2 \lambda^4}{(1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = -\frac{\lambda^2 (1 - \beta^2)}{(1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = 0$	$\lambda^2 (du)^2$	0	$c_1^{(1)} = \frac{\lambda a \sin \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$ $c_1^{(2)} = \frac{\lambda a \cos \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$ $c_1^{(3)} = \frac{\beta}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$ $c_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$	$c_2^{(1)} = +\cos \lambda(u - u_0)$ $c_2^{(2)} = +\sin \lambda(u - u_0)$ $c_2^{(3)} = 0$ $c_2^{(4)} = 0$	$c_3^{(1)} = -\frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \lambda(u - u_0)}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$ $c_3^{(2)} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \cos \lambda(u - u_0)}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$ $c_3^{(3)} = \frac{a \lambda \beta}{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$ $c_3^{(4)} = \frac{i a \lambda}{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - a^2 \lambda^2 - \beta^2}}$	$c_4^{(1)} = 0$ $c_4^{(2)} = 0$ $c_4^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ $c_4^{(4)} = -\frac{\beta}{i \sqrt{1 - \beta^2}}$
IIb wie IIa	$x^{(1)} = a \cos \lambda(u - u_0)$ $x^{(2)} = a \sin \lambda(u - u_0)$ $x^{(3)} = x_0^{(3)}$ $x^{(4)} = iu$	λ	u	$a x_0^{(3)} u_0$	Dreidimensionale gemeine Schraubenlinie in den Räumen $x^{(3)} = \text{const}$ Reelle Drehung in der $x^{(1)} x^{(2)}$ -Ebene Imaginäre Schiebung längs der Zeitachse	$ds^2 = -(1 - a^2 \lambda^2) (du)^2$ wobei $1 - a^2 \lambda^2 > 0$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = \frac{a^2 \lambda^4}{(1 - a^2 \lambda^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = -\frac{\lambda^2}{(1 - a^2 \lambda^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = 0$	$\lambda^2 (du)^2$	0	$c_1^{(1)} = \frac{\lambda a \sin \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}$ $c_1^{(2)} = \frac{\lambda a \cos \lambda(u - u_0)}{i \sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}$ $c_1^{(3)} = 0$ $c_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}$	$c_2^{(1)} = +\cos \lambda(u - u_0)$ $c_2^{(2)} = +\sin \lambda(u - u_0)$ $c_2^{(3)} = 0$ $c_2^{(4)} = 0$	$c_3^{(1)} = -\frac{\sin \lambda(u - u_0)}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}$ $c_3^{(2)} = \frac{\cos \lambda(u - u_0)}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}$ $c_3^{(3)} = 0$ $c_3^{(4)} = \frac{i a \lambda}{\sqrt{1 - a^2 \lambda^2}}$	$c_4^{(1)} = 0$ $c_4^{(2)} = 0$ $c_4^{(3)} = 1$ $c_4^{(4)} = 0$
IIIa $- \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ $- \varphi_3 = \varphi_4 = 1$ [(11)11]	$x^{(1)} = x_0^{(1)} + \alpha u$ $x^{(2)} = x_0^{(2)}$ $x^{(3)} = b \cos iu$ $x^{(4)} = b \sin iu$	α	u	$x_0^{(1)} x_0^{(2)} b$	Dreidimensionale gemeine Schraubenlinie in den Räumen $x^{(2)} = \text{const}$ Imaginäre Drehung in der $x^{(3)} x^{(4)}$ -Ebene Reelle Schiebung längs der $x^{(1)}$ -Achse	$ds^2 = -(b^2 - \alpha^2) (du)^2$ wobei $b^2 - \alpha^2 > 0$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = \frac{b^2}{(b^2 - \alpha^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = -\frac{\alpha^2}{(b^2 - \alpha^2)^2}$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = 0$	$-(du)^2$	0	$c_1^{(1)} = \frac{\alpha}{i \sqrt{b^2 - \alpha^2}}$ $c_1^{(2)} = 0$ $c_1^{(3)} = -\frac{b \sin iu}{i \sqrt{b^2 - \alpha^2}}$ $c_1^{(4)} = \frac{b \cos iu}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}$	$c_2^{(1)} = 0$ $c_2^{(2)} = 0$ $c_2^{(3)} = -\cos iu$ $c_2^{(4)} = -\sin iu$	$c_3^{(1)} = \frac{b}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}$ $c_3^{(2)} = 0$ $c_3^{(3)} = -\frac{\alpha \sin iu}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}$ $c_3^{(4)} = \frac{\alpha \cos iu}{\sqrt{b^2 - \alpha^2}}$	$c_4^{(1)} = 0$ $c_4^{(2)} = 1$ $c_4^{(3)} = 0$ $c_4^{(4)} = 0$
IIIb wie IIIa	$x^{(1)} = x_0^{(1)}$ $x^{(2)} = x_0^{(2)}$ $x^{(3)} = b \cos iu$ $x^{(4)} = b \sin iu$		u	$x_0^{(1)} x_0^{(2)} b$	Kreise in den Ebenen $x^{(1)} = \text{const}$ $x^{(2)} = \text{const}$ um den Ursprung: Imaginäre Drehung in der $x^{(3)} x^{(4)}$ -Ebene	$ds^2 = -b^2 (du)^2$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = \frac{1}{b^4}$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = 0$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = 0$	$-(du)^2$	0	$c_1^{(1)} = 0$ $c_1^{(2)} = 0$ $c_1^{(3)} = -\sin iu$ $c_1^{(4)} = \cos iu$	$c_2^{(1)} = 0$ $c_2^{(2)} = 0$ $c_2^{(3)} = -\cos iu$ $c_2^{(4)} = -\sin iu$	unbestimmt	unbestimmt
IV $- \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ $- \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ [(81)]	$x^{(1)} = x_0^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha u^2$ $x^{(2)} = x_0^{(2)}$ $x^{(3)} = x_0^{(3)} + x_0^{(1)} u + \frac{1}{2} \alpha u^2$ $x^{(4)} = i(x_0^{(3)} + x_0^{(1)} u + \frac{1}{2} \alpha u^2) + i \alpha u$	α	u	$x_0^{(1)} x_0^{(2)} x_0^{(3)}$	Dreidimensionale Schraubenlinie in den Räumen $x^{(2)} = \text{const}$ auf Zylinder von Minimalgeraden. (Entdeckt durch Lyon, Annales de Grenoble 1890)	$ds^2 = -(\alpha^2 + 2 x_0^{(1)}) (du)^2$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 2 x_0^{(1)})^2}$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = -\frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 2 x_0^{(1)})^2} = -\left(\frac{1}{R_1}\right)^2$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = 0$	0	0	$c_1^{(1)} = \frac{\alpha u}{i \sqrt{\alpha^2 + 2 x_0^{(1)}}}$ $c_1^{(2)} = 0$ $c_1^{(3)} = \frac{x_0^{(1)} + \frac{1}{2} \alpha u^2}{i \sqrt{\alpha^2 + 2 x_0^{(1)}}}$ $c_1^{(4)} = \frac{x_0^{(3)} + \frac{1}{2} \alpha u^2 + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 2 x_0^{(1)}}}$	$c_2^{(1)} = -1$ $c_2^{(2)} = 0$ $c_2^{(3)} = -u$ $c_2^{(4)} = -iu$	$c_3^{(1)} = 0$ $c_3^{(2)} = 0$ $c_3^{(3)} = \text{unbestimmt als Minimalgerade der } x^{(3)} x^{(4)}\text{-Ebene}$ $c_3^{(4)} = 0$	$c_4^{(1)} = 0$ $c_4^{(2)} = 1$ $c_4^{(3)} = 0$ $c_4^{(4)} = 0$
V $- \varphi_1 = \varphi_2 = 0$ $- \varphi_3 = \varphi_4 = 0$ [(1111)]	$x^{(1)} = x_0^{(1)}$ $x^{(2)} = x_0^{(2)}$ $x^{(3)} = x_0^{(3)} + \beta u$ $x^{(4)} = iu$	β	u	$x_0^{(1)} x_0^{(2)} x_0^{(3)}$	Gerade in den Ebenen $x^{(1)} = \text{const}$ $x^{(2)} = \text{const}$ Imaginäre Schiebung längs einer zeitartigen Richtung	$ds^2 = -(1 - \beta^2) (du)^2$ wobei $1 - \beta^2 > 0$	$\left(\frac{1}{R_1}\right)^2 = 0$	$\left(\frac{1}{R_2}\right)^2 = 0$	$\left(\frac{1}{R_3}\right)^2 = 0$	0	0	$c_1^{(1)} = 0$ $c_1^{(2)} = 0$ $c_1^{(3)} = \frac{\beta}{i \sqrt{1 - \beta^2}}$ $c_1^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$	unbestimmt	unbestimmt	unbestimmt

Erläuterungen: ad 2. Gibt einfachste Typen; kann durch Lorentztransformation auf kompliziertere Gestalt gebracht werden.
ad 7. Das Bogenelement als zeitartig muß in dieser Darstellung rein imaginär sein.

ad 13. Die Richtungskosinusse $c_1^{(1)} c_1^{(2)} c_1^{(3)}$ als einer zeitartigen Richtung müssen rein imaginär sein.
ad 11. und 12. Gibt die Invarianten der Transformation, durch deren Angabe sie unabhängig von Koordinatensystemen, unabhängig vom gewählten Ort charakterisiert wird; sie sind von Kurve zu Kurve identisch, d. h. unabhängig von den Scharparametern.

ad 13. 14. 15. 16. Gibt das verallgemeinerte Eigensystem, das hier an Stelle des Lorentzschen mitbewegten Systems tritt.

Tabelle 2. Kinematik und Dynamik der Weltlinien konstanter Krümmungen.

1. Darstellung der Bahn als Funktion der Zeit	2. Geometrische Gestalt der Bahnkurve	3. Geschwindigkeit und $\sqrt{1-v^2/c^2}$	4. Interpretation von 3	5. Minkowskische Kraft, berechnet nach $K^{(h)} = m_0 \frac{d^2 x^{(h)}}{dt^2} = -\frac{m_0 c^2}{R_1} \cdot c_2^{(h)}$ (vgl. für $1/R_1$ und c_2 Tab. 1, Kol. 8 bzw. 14)	6. Newtonsche Kraft $\mathfrak{K} = K/\sqrt{1-v^2/c^2}$	7. Beschleunigung	8. Interpretation von 7	9. Charakteristik des zeitlichen Verlaufs	10. Grenzwerte der Beschleunigungen ($c = \infty$)	11. Newtonsches Analogon ($c = \infty$)	Erzeugende F
I $x = a \cos \lambda(u - u_0)$ $y = a \sin \lambda(u - u_0)$ $z = \sqrt{b^2 + c^2} t$ $u = \ln \frac{-ct + \sqrt{b^2 + c^2} t^2}{b}$	Auf dem Kreiszylinder mit dem Radius a um die z -Achse $z = b \frac{e^{\varphi/2} + e^{-\varphi/2}}{2}$ wo φ der Polarwinkel. Bei Abwicklung in die xz -Ebene $x = a \varphi$ $z = b \frac{e^{\varphi/2} + e^{-\varphi/2}}{2}$ Ketten- linie	$v_x = a \left(-\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right) (-\sin \lambda(u - u_0))$ $v_y = a \left(-\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right) (\cos \lambda(u - u_0))$ $v_z = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{\frac{b^2 - a^2 \lambda^2}{b^2 + c^2 t^2}}$	Ungleichförmige Rotation; Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = -\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$ Anstieg bzw. Fall mit ungleichförmiger Be- schleunigung $\gamma_z = \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$ Umkehr bei $t = 0, z = b$.	$K^{(1)} = m_0 \frac{a c^2 \lambda^2}{b^2 - a^2 \lambda^2} (-\cos \lambda(u - u_0))$ $K^{(2)} = m_0 \frac{a c^2 \lambda^2}{b^2 - a^2 \lambda^2} (-\sin \lambda(u - u_0))$ $K^{(3)} = m_0 \frac{c^3}{b^2 - a^2 \lambda^2} \sqrt{b^2 + c^2} t^2$	$\mathfrak{K}_x = m_{\perp} a (\omega_z)^2 \cdot (-\cos \lambda(u - u_0))$ $\mathfrak{K}_y = m_{\perp} a (\omega_z)^2 \cdot (-\sin \lambda(u - u_0))$ $\mathfrak{K}_z = m_{\perp} \gamma_z$ wo die transversale Masse: $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}} \sqrt{b^2 + c^2} t^2$	$\dot{v}_x = a \left(-\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right)^2 (-\cos \lambda(u - u_0))$ $-\frac{c^3 t}{b^2 + c^2 t^2} a \left(-\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right) (-\sin \lambda(u - u_0))$ $\dot{v}_y = a \left(-\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right)^2 (-\sin \lambda(u - u_0))$ $-\frac{c^3 t}{b^2 + c^2 t^2} a \left(-\frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right) (\cos \lambda(u - u_0))$ $\dot{v}_z = \frac{c^3 t}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} - \frac{c^3 t}{b^2 + c^2 t^2} \cdot \frac{c^3 t}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x - \frac{(\mathfrak{K} v)_x}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_y = \mathfrak{K}_y - \frac{(\mathfrak{K} v)_y}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{(\mathfrak{K} v)_z}{c^2}$ Zentripetalbeschleunigung: $a (\omega_z)^2$ Fallbeschleunigung: γ_z Widerstand in Richtung der Bewegung: $\frac{\gamma_z v_z}{c^2} v$	Von $t = -\infty$ an in Richtung der abneh- menden z immer lang- samer steigend, immer rascher rotierend; Um- kehr bei $t = 0$: Auf- kehr der Rotations- geschwindigkeit, Ab- nahme der Fall- beschleunigung bis $t = \infty$	$\lim_{c \rightarrow \infty} \omega_z = \omega_z^0$ $= \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{c \lambda}{b} \right)$ $\lim_{c \rightarrow \infty} \gamma_z = \gamma_z^0$ $= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c^3}{b}$	$x = a \cos \omega_z^0 (t - t_0)$ $y = a \sin \omega_z^0 (t - t_0)$ $z = z_0 + \frac{1}{2} \gamma_z^0 t^2$ gleichförmige Rotation; konstante Fallbeschleunigung. Parabel statt der Kettenlinie in 2.	5 6
IIa $x = a \cos \omega_z(t - t_0)$ $y = a \sin \omega_z(t - t_0)$ $z = z_0 + v_z t$	Schraubenlinie auf dem Kreiszylinder mit dem Radius a um die z -Achse	$v_x = a \omega_z (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $v_y = a \omega_z (\cos \omega_z(t - t_0))$ $v_z = v_z$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^2 + v_z^2}{c^2}}$	Gleichförmige Rotation; Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \omega_z$ Gleichförmige Translation $v_z = v_z$	$K^{(1)} = \frac{m_0 a (\omega_z)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^2 + v_z^2}{c^2}} (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $K^{(2)} = \frac{m_0 a (\omega_z)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^2 + v_z^2}{c^2}} (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $K^{(3)} = 0$	$\mathfrak{K}_x = m_{\perp} a (\omega_z)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_y = m_{\perp} a (\omega_z)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_z = 0$ $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^2 + v_z^2}{c^2}}}$	$\dot{v}_x = a (\omega_z)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_y = a (\omega_z)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_z = 0$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x$ $m_{\perp} \dot{v}_y = \mathfrak{K}_y$ $m_{\perp} \dot{v}_z = 0$ Konstante Zentripetal- beschleunigung: $a (\omega_z)^2$	bekannt	$\lim_{c \rightarrow \infty} \omega_z = \omega_z$	identisch mit 1.	5 6
IIb $x = a \cos \omega_z(t - t_0)$ $y = a \sin \omega_z(t - t_0)$ $z = z_0$	Kreisbahn	$v_x = a \omega_z (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $v_y = a \omega_z (\cos \omega_z(t - t_0))$ $v_z = 0$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^2}{c^2}}$	Gleichförmige Rotation; Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \omega_z$	$K^{(1)} = \frac{m_0 a (\omega_z)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^2}{c^2}} (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $K^{(2)} = \frac{m_0 a (\omega_z)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^2}{c^2}} (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $K^{(3)} = 0$	$\mathfrak{K}_x = m_{\perp} a (\omega_z)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_y = m_{\perp} a (\omega_z)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_z = 0$ $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^2}{c^2}}}$	$\dot{v}_x = a (\omega_z)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_y = a (\omega_z)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_z = 0$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x$ $m_{\perp} \dot{v}_y = \mathfrak{K}_y$ $m_{\perp} \dot{v}_z = 0$ Konstante Zentripetal- beschleunigung: $a (\omega_z)^2$	do.	do.	do.	5 6
IIIa $x = x_0 + a \ln \frac{-ct + \sqrt{b^2 + c^2} t^2}{b}$ $y = y_0$ $z = \sqrt{b^2 + c^2} t^2$	Kettenlinie $\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{b} - \frac{x-x_0}{a}$ $z = b \frac{e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{2}$	$v_x = -\frac{a c}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$ $v_y = 0$ $v_z = \frac{c t}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2 + c^2 t^2}}$	Wurf: Ungleichförmige Translation v_z Anstieg (Fall) $\gamma_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$ Umkehr bei $t = 0, z = b$	$K^{(1)} = 0$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = + \frac{m_0 c^2}{b^2 - a^2} \sqrt{b^2 + c^2} t^2$	$\mathfrak{K}_x = 0$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = m_{\perp} \gamma_z$ $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sqrt{b^2 + c^2} t^2$	$\dot{v}_x = -\frac{c^3 t}{b^2 + c^2 t^2} \left(\frac{a c}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right)$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = \frac{c^3}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} - \frac{c^3 t}{b^2 + c^2 t^2} \left(\frac{c^3 t}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right)$	$m_{\perp} \dot{v}_x = -\frac{(v \mathfrak{K})_x}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_y = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{(v \mathfrak{K})_z}{c^2}$ Fallbeschleunigung: γ_z Widerstand in Rich- tung der Bewegung $\frac{\gamma_z v_z}{c^2} v$	Von $t = -\infty$ an in Richtung der abneh- menden x steigend, horizontal nach x ge- worfen. Bei $t = 0$ Umkehr: Aufkehrung der Wurfgeschwindig- keit, Abnahme der Fallbeschleunigung	$\lim_{c \rightarrow \infty} \gamma_z = \gamma_z^0$ $= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c^3}{b}$ $\lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{a c}{b} \right) = v_z^0$	$x = x_0 + v_z^0 t$ $y = y_0$ $z = z_0 + \frac{1}{2} \gamma_z^0 t^2$ Horizontaler Wurf. Parabel statt der Kettenlinie in 2.	5 6
IIIb $x = x_0$ $y = y_0$ $z = \sqrt{b^2 + c^2} t^2$ } Borns Hyperbel- bewegung	z -Achse	$v_x = 0$ $v_y = 0$ $v_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} t$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$	Anstieg (Fall) mit ungleichförmiger Beschleunigung $\gamma_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2}$	$K^{(1)} = 0$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = \frac{m_0 c^3}{b^2} \sqrt{b^2 + c^2} t^2$	$\mathfrak{K}_x = 0$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = m_{\perp} \gamma_z$	$\dot{v}_x = 0$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = \frac{c^3}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} - \frac{c^3 t}{b^2 + c^2 t^2} \left(\frac{c^3 t}{\sqrt{b^2 + c^2} t^2} \right)$	$m_{\perp} \dot{v}_x = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_y = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{(\mathfrak{K} v)_z}{c^2} v$ Fallbeschleunigung: γ_z Widerstand: $\frac{\gamma_z v_z}{c^2} v$	Von $t = -\infty$ an An- stieg in Richtung der abnehmenden z . Um- kehr bei $t = 0$ mit ständig abnehmender Fallbeschleunigung	$\lim_{c \rightarrow \infty} \gamma_z = \gamma_z^0$ $= \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{c^3}{b}$	$x = x_0$ $y = y_0$ $z = z_0 + \frac{1}{2} \gamma_z^0 t^2$ freier Fall.	5 6
IV $x = x_0 + \frac{1}{2} a u^2$ $y = y_0$ $z = z_0 + x_0 u + \frac{1}{6} a u^3$ wobei $c t = z_0 + x_0 u + \frac{1}{6} a u^3 + a u$ $= z + a u$	Kubische Kurve in der xz -Ebene; Umkehr: $u = 0 (c t_0 = z_0, x_0, y_0)$; $2 a (x - x_0) = (z - c t)^2$	$v_x = \frac{c t - z}{x + a} c$ $v_y = 0$ $v_z = \frac{x}{x + a} c$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \frac{\sqrt{a^2 + 2 a x_0}}{x + a}$	Anstieg (Fall) mit $\gamma_z = \frac{c}{x + a}$ Instantane Rotation um ein Drehungszentrum auf der Hauptnormale der Bahn; Radius $r = \sqrt{x^2 + (c t - z)^2}$ (nicht gleich Krümmungs- radius!) Winkelgeschwin- digkeit $\omega_r = \frac{c}{x + a}$	$K^{(1)} = -\frac{m_0 c^3 a}{a^2 + 2 a x_0}$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = -\frac{m_0 c^3 (c t - z)}{a^2 + 2 a x_0}$	$\mathfrak{K}_x = + \frac{m_{\perp} c^3 a}{(x + a)^2}$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = + \frac{m_{\perp} c^3 (c t - z)}{(x + a)^2}$ oder $\mathfrak{K}_x = m_{\perp} \frac{c^3}{x + a} + m_{\perp} \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2 + (c t - z)^2}} \right) \sqrt{x^2 + (c t - z)^2} \left(\frac{c}{x + a} \right)^2$ $\mathfrak{K}_z = \cdot + m_{\perp} \left(\frac{c t - z}{\sqrt{x^2 + (c t - z)^2}} \right) \sqrt{x^2 + (c t - z)^2} \left(\frac{c}{x + a} \right)^2$ $= \cdot m_{\perp} r \omega_r^2 \sin(r x)$	$\dot{v}_x = \frac{c^3 \cdot a}{(x + a)^2} - \frac{c (c t - z)}{(x + a)^2} \cdot \frac{c t - z}{x + a} \cdot c$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = \frac{c^3 (c t - z)}{(x + a)^2} - \frac{c (c t - z)}{(x + a)^2} \cdot \frac{x}{x + a}$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x - \frac{b \mathfrak{K}}{c^2} v_x$ $m_{\perp} \dot{v}_y = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{b \mathfrak{K}}{c^2} v_z$ Fallbeschleunigung: γ_z Instantane Rotation: $r \omega_r^2$ Widerstand $\parallel v$ $\frac{(v \mathfrak{K})_v}{m_{\perp} c^2}$	Von $t = -\infty$ an An- stieg in Richtung der abnehmenden x . Um- kehr bei x_0, t_0 , wor- auf Fall mit ständig abnehmender Be- schleunigung. Instan- tane Rotationen um variable Zentren	—	—	5 6
V $x = x_0$ $y = y_0$ $z = z_0 + v_z t$	z -Achse	$v_x = 0$ $v_y = 0$ $v_z = v_z$ $\sqrt{1-v^2/c^2} = \sqrt{1 - v_z^2/c^2}$	Gleichförmige Trans- lation Geschwindigkeit v_z	$K^{(1)} = 0$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = 0$	$\mathfrak{K}_x = 0$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = 0$	$\dot{v}_x = 0$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = 0$	—	bekannt	$\lim_{c \rightarrow \infty} v_z = v_z$	identisch mit 1.	5 6

Erläuterungen: ad 1. Es ist wieder zu erinnern, daß Translationen durch eine Lorentztransformation hineingebracht werden können, nur verändert dies gleichzeitig den einfachen Ausdruck 12. des Feldes. — Bei Typ IV wurde eine Translation weggelassen (statt $y = y_0$ könnte $y = y_0 + \beta x$ stehen).

ad 5. Bezogen auf einen Massenpunkt m_0 und das Ruhvolumen.

ad 8. Der Widerstand in Richtung der Bewegung rührt bekanntlich vom Unterschied der longitudinalen gegen die transversale Masse her (§ 2). Diese Darstellung hier behufs Vergleichung mit den Newtonschen Analogon 11., deren relativistische Verallgemeinerung die Weltlinien konstanter Krümmung sind.

ad 10. Rechtfertigung des Grenzüberganges: Anhang 2.

ad 12. Die Fälle $|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}_z$, $|\mathfrak{K}| = \mathfrak{K}_r$ durch Lorentztransformation aus den Typen II bzw. III wenn $|\mathfrak{K}| >$ bzw. $< |\mathfrak{K}|$. (Mit den so errechneten ist Typ IV ($|\mathfrak{K}| = |\mathfrak{K}|$) in eine Klasse zu stellen, wenn die Bewegung des elektrischen Massenpunkts im elektromagnetischen Feld $\mathfrak{E}_1 \mathfrak{H}$ zu untersuchen ist.)

ad 13. Durch Vergleichung der Koeffizienten der beiden infinitesimalen orthogonalen Transformationen (§ 3).

Tabelle 2. Kinematik und Dynamik der Weltlinien konstanter Krümmungen.

Tafel XVI.

Tabelle 2. Kinematik und Dynamik der Weltlinien konstanter Krümmungen.													Tafel XVI.	
3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.				
Interpretation von 3	Minkowskische Kraft, berechnet nach $K^{(h)} = m_0 \frac{d^2 x^{(h)}}{d\tau^2} = - \frac{m_0 c^2}{R_1} \cdot c_2^{(h)}$ (vgl. für $1/R_1$ und c_2 Tab. 1, Kol. 3 bzw. 14)	Newton'sche Kraft $\mathfrak{K} = K \sqrt{1 - v^2/c^2}$	Beschleunigung	Interpretation von 7	Charakteristik des zeitlichen Verlaufs	Grenzwerte der Beschleunigungen ($c = \infty$)	Newton'sches Analogon ($c = \infty$)	Erzeugendes Feld (§ 8)	Darstellung der Beschleunigungen durch das Feld					
Ungleichförmige Rotation; Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = - \frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}}$ Anstieg bzw. Fall mit ungleichförmiger Beschleunigung $\gamma_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}}$ Umkehr bei $t = 0, z = b$.	$K^{(1)} = m_0 \frac{a c^2 \lambda^2}{b^2 - a^2 \lambda^2} (-\cos \lambda(u - u_0))$ $K^{(2)} = m_0 \frac{a c^2 \lambda^2}{b^2 - a^2 \lambda^2} (-\sin \lambda(u - u_0))$ $K^{(3)} = m_0 \frac{c^2}{b^2 - a^2 \lambda^2} \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$	$\mathfrak{K}_x = m_{\perp} a (\omega_z)^2 \cdot (-\cos \lambda(u - u_0))$ $\mathfrak{K}_y = m_{\perp} a (\omega_z)^2 \cdot (-\sin \lambda(u - u_0))$ $\mathfrak{K}_z = m_{\perp} \gamma_z$ wo die transversale Masse: $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}} \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$	$\dot{v}_x = a \left(- \frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \right)^2 (-\cos \lambda(u - u_0))$ $\dot{v}_y = a \left(- \frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \right)^2 (-\sin \lambda(u - u_0))$ $\dot{v}_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \cdot a \left(- \frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \right) (+\cos \lambda(u - u_0))$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x - \frac{(\mathfrak{K} v)_x}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_y = \mathfrak{K}_y - \frac{(\mathfrak{K} v)_y}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{(\mathfrak{K} v)_z}{c^2}$ Zentripetalbeschleunigung: $a (\omega_z)^2$ Fallbeschleunigung: γ_z Widerstand in Richtung der Bewegung: $\frac{\gamma_z v_z}{c^2}$	Von $t = -\infty$ an in Richtung der abnehmenden z immer langsamer steigend, immer rascher rotierend; Umkehr bei $t = 0$: Aufzehrung der Rotationsgeschwindigkeit, Abnahme der Fallbeschleunigung bis $t = \infty$	$\lim_{c=\infty} \omega_z = \omega_z^0$ $= \lim_{c=\infty} \left(- \frac{c \lambda}{b} \right)$ $\lim_{c=\infty} \gamma_z = \gamma_z^0$ $= \lim_{c=\infty} \frac{c^2}{b}$	$x = a \cos \omega_z^0 (t - t_0)$ $y = a \sin \omega_z^0 (t - t_0)$ $z = z_0 + \frac{1}{2} \gamma_z^0 t^2$ gleichförmige Rotation; konstante Fallbeschleunigung. Parabel statt der Kettenlinie in 2.	$ \mathfrak{E} = \mathfrak{K}_z$ $ \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z$	$\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0 c} = - \frac{c \lambda}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 - a^2 \lambda^2}}$ oder $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp} c} = \omega_z$ $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp}} = \gamma_z$					
Gleichförmige Rotation; Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \omega_z^0$ Gleichförmige Translation $v_z = v_z^0$	$K^{(1)} = \frac{m_0 a (\omega_z^0)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^0 + v_z^0}{c^2}} (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $K^{(2)} = \frac{m_0 a (\omega_z^0)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^0 + v_z^0}{c^2}} (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $K^{(3)} = 0$	$\mathfrak{K}_x = m_{\perp} a (\omega_z^0)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_y = m_{\perp} a (\omega_z^0)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_z = 0$ $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^0 + v_z^0}{c^2}}}$	$\dot{v}_x = a (\omega_z^0)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_y = a (\omega_z^0)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_z = 0$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x$ $m_{\perp} \dot{v}_y = \mathfrak{K}_y$ $m_{\perp} \dot{v}_z = 0$ Konstante Zentripetalbeschleunigung: $a (\omega_z^0)^2$	bekannt	$\lim_{c=\infty} \omega_z = \omega_z^0$	identisch mit 1.	$ \mathfrak{E} = \mathfrak{K}_z$ $ \mathfrak{E} = 0$	$\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0 c} = \frac{\omega_z}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^0 + v_z^0}{c^2}}}$ oder $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp} c} = \omega_z$					
Gleichförmige Rotation; Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \omega_z^0$	$K^{(1)} = \frac{m_0 a (\omega_z^0)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^0}{c^2}} (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $K^{(2)} = \frac{m_0 a (\omega_z^0)^2}{1 - \frac{a^2 \omega_z^0}{c^2}} (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $K^{(3)} = 0$	$\mathfrak{K}_x = m_{\perp} a (\omega_z^0)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_y = m_{\perp} a (\omega_z^0)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\mathfrak{K}_z = 0$ $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^0}{c^2}}}$	$\dot{v}_x = a (\omega_z^0)^2 (-\cos \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_y = a (\omega_z^0)^2 (-\sin \omega_z(t - t_0))$ $\dot{v}_z = 0$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x$ $m_{\perp} \dot{v}_y = \mathfrak{K}_y$ $m_{\perp} \dot{v}_z = 0$ Konstante Zentripetalbeschleunigung: $a (\omega_z^0)^2$	do.	do.	do.	do.	$\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0 c} = \frac{\omega_z}{\sqrt{1 - \frac{a^2 \omega_z^0}{c^2}}}$ oder $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp} c} = \omega_z$					
Wurf: Ungleichförmige Translation v_z Anstieg (Fall) $\gamma_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}}$ Umkehr bei $t = 0, z = b$	$K^{(1)} = 0$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = + \frac{m_0 c^2}{b^2 - a^2} \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$	$\mathfrak{K}_x = 0$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = m_{\perp} \gamma_z$ $m_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{b^2 - a^2}} \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$	$\dot{v}_x = - \frac{c^2 t}{b^2 + c^2 t^2} \left(\frac{a c}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \right)$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} - \frac{c^2 t}{b^2 + c^2 t^2} \left(\frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \right)$	$m_{\perp} \dot{v}_x = - \frac{(v \mathfrak{K})_x}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_y = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{(v \mathfrak{K})_z}{c^2}$ Fallbeschleunigung: γ_z Widerstand in Richtung der Bewegung: $\frac{\gamma_z v_z}{c^2}$	Von $t = -\infty$ an in Richtung der abnehmenden z steigend, horizontal nach x geworfen. Bei $t = 0$ Umkehr: Aufzehrung der Wurfgeschwindigkeit, Abnahme der Fallbeschleunigung	$\lim_{c=\infty} \gamma_z = \gamma_z^0$ $= \lim_{c=\infty} \frac{c^2}{b}$ $\lim_{c=\infty} \left(- \frac{a c}{b} \right) = v_z^0$	$x = x_0 + v_z^0 t$ $y = y_0$ $z = z_0 + \frac{1}{2} \gamma_z^0 t^2$ Horizontaler Wurf. Parabel statt der Kettenlinie in 2.	$ \mathfrak{E} = 0$ $ \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z$	$\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0} = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ oder $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp}} = \gamma_z$					
Anstieg (Fall) mit ungleichförmiger Beschleunigung $\gamma_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}}$	$K^{(1)} = 0$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = \frac{m_0 c^2}{b^2} \sqrt{b^2 + c^2 t^2}$	$\mathfrak{K}_x = 0$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = m_{\perp} \gamma_z$	$\dot{v}_x = 0$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = \frac{c^2}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} - \frac{c^2 t}{b^2 + c^2 t^2} \left(\frac{c^2 t}{\sqrt{b^2 + c^2 t^2}} \right)$	$m_{\perp} \dot{v}_x = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_y = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{(\mathfrak{K} v)_z}{c^2}$ Fallbeschleunigung: γ_z Widerstand: $\frac{\gamma_z v_z}{c^2}$	Von $t = -\infty$ an Anstieg in Richtung der abnehmenden z . Umkehr bei $t = 0$ mit ständig abnehmender Fallbeschleunigung	$\lim_{c=\infty} \gamma_z = \gamma_z^0$ $= \lim_{c=\infty} \frac{c^2}{b}$	$x = x_0$ $y = y_0$ $z = z_0 + \frac{1}{2} \gamma_z^0 t^2$ freier Fall.	$ \mathfrak{E} = 0$ $ \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z$	$\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0} = \frac{c^2}{b}$ oder $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp}} = \gamma_z$					
Anstieg (Fall) mit $\gamma_z = \frac{c^2}{x + \alpha}$ Instantane Rotation um ein Drehungszentrum auf der Hauptnormale der Bahn; Radius $r = \sqrt{x^2 + (c t - x)^2}$ (nicht gleich Krümmungsradius!) Winkelgeschwindigkeit $\omega_z = \frac{c}{x + \alpha}$	$K^{(1)} = - \frac{m_0 c^2 \alpha}{a^2 + 2 x_0 \alpha}$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = - \frac{m_0 c^2 (c t - x)}{a^2 + 2 x_0 \alpha}$	$\mathfrak{K}_x = + \frac{m_{\perp} c^2 \alpha}{(x + \alpha)^2}$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = + \frac{m_{\perp} c^2 (c t - x)}{(x + \alpha)^2}$ oder $\mathfrak{K}_x = m_{\perp} \frac{c^2}{x + \alpha} + m_{\perp} \left(- \frac{x}{\sqrt{x^2 + (c t - x)^2}} \right) \sqrt{x^2 + (c t - x)^2} \left(\frac{c}{x + \alpha} \right)^2$ $= m_{\perp} \gamma_z + m_{\perp} r \omega_z^2 \cos(r x)$ $\mathfrak{K}_z = \dots + m_{\perp} \left(\frac{c t - x}{\sqrt{x^2 + (c t - x)^2}} \right) \sqrt{x^2 + (c t - x)^2} \left(\frac{c}{x + \alpha} \right)^2$ $= \dots + m_{\perp} r \omega_z^2 \sin(r x)$	$\dot{v}_x = \frac{c^2 \cdot \alpha}{(x + \alpha)^2} - \frac{c(c t - x)}{(x + \alpha)^2} \cdot \frac{c t - x}{x + \alpha} \cdot c$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = \frac{c^2 (c t - x)}{(x + \alpha)^2} - \frac{c(c t - x)}{(x + \alpha)^2} \cdot \frac{x}{x + \alpha} \cdot c$	$m_{\perp} \dot{v}_x = \mathfrak{K}_x - \frac{v \mathfrak{K}_x}{c^2}$ $m_{\perp} \dot{v}_y = 0$ $m_{\perp} \dot{v}_z = \mathfrak{K}_z - \frac{v \mathfrak{K}_z}{c^2}$ Fallbeschleunigung: γ_z Instantane Rotation: $r \omega_z^2$ Widerstand $\parallel v$: $\frac{(v \mathfrak{K})_v}{m_{\perp} c^2}$	Von $t = -\infty$ an Anstieg in Richtung der abnehmenden z . Umkehr bei $x_0 \pm t_0$, worauf Fall mit ständig abnehmender Beschleunigung. Instantane Rotationen um variable Zentren	—	—	$ \mathfrak{E} = \mathfrak{K}_z$ $ \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_z$ exzeptioneller Fall	$\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0 c} = \mathfrak{E}_z \frac{e}{m_0} \cdot \frac{1}{c}$ oder $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp} c} = \omega_z = \frac{c}{x + \alpha}$ $\mathfrak{E}_z \frac{e}{m_{\perp}} = \gamma_z = \frac{c^2}{x + \alpha}$					
Gleichförmige Translation Geschwindigkeit v_z	$K^{(1)} = 0$ $K^{(2)} = 0$ $K^{(3)} = 0$	$\mathfrak{K}_x = 0$ $\mathfrak{K}_y = 0$ $\mathfrak{K}_z = 0$	$\dot{v}_x = 0$ $\dot{v}_y = 0$ $\dot{v}_z = 0$	—	bekannt	$\lim_{c=\infty} v_z = v_z$	identisch mit 1.	$ \mathfrak{E} = 0$ $ \mathfrak{E} = 0$	—					

durch eine Lorentztransformation hineingebracht werden können, nur verändert dies gleichzeitig den einfachen Ausdruck 12. des Feldes. — Bei Typ IV wurde eine Translation weggelassen (statt $y = y_0$ könnte $y = y_0 + \beta u$ stehen).

Transformation aus den Typen II bzw. III wenn $|\mathfrak{E}| >$ bzw. $< |\mathfrak{E}|$. (Mit den so errechneten ist Typ IV ($|\mathfrak{E}| = |\mathfrak{E}|$) in eine Klasse zu stellen, wenn die Bewegung des elektrischen Massenpunkts im elektromagnetischen Feld $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$ zu untersuchen ist.)

F. Kottler.